ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 20 April 1940 Heft 2

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Die elliptische Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage[1].

Von *Klaus Krienes* in Göttingen.

Die vorliegende Arbeit ist als Beitrag zur Theorie der tragenden Fläche gedacht. Es wird auf potentialtheoretischer Grundlage die Aerodynamik der elliptischen Tragfläche in gerader und schräger Anströmung untersucht. Die Grundlage der Rechnung bildet die linearisierte Theorie des Beschleunigungspotentials [1; 2][2], in der also alle Größen, die klein von höherer Ordnung sind, vernachlässigt werden. Das führt zu folgenden Vereinfachungen:

1. Die z-Koordinate jedes Flügelpunktes wird vernachlässigt, d. h. die Unstetigkeit der Potentialfunktionen, die dem Drucksprung an der Fläche entspricht, liegt auf der Grundellipse (vgl. Bild 1).
2. Die Stromlinien, längs deren die konvektive Integration der Beschleunigung vorgenommen wird, sind Geraden parallel zur Anströmungsrichtung.

Im Falle der elliptischen Berandung sind Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta\psi=0$ als Produkte von Laméschen Funktionen bekannt, deren Eigenschaften im folgenden noch näher behandelt werden.

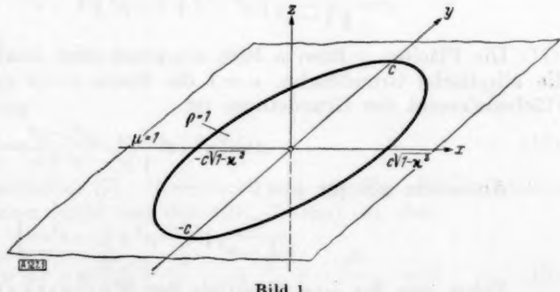


Bild 1.

Das Beschleunigungspotential und die Laméschen Funktionen. Die elliptische Tragfläche befinde sich in einer stationären Parallelströmung mit der Geschwindigkeit V. Die Flüssigkeit sei homogen, inkompressibel, reibungslos und der Schwere nicht unterworfen sowie außerhalb der tragenden Fläche und des abgehenden Wirbelbandes drehungsfrei. Es gilt dann

$$\frac{D\mathfrak{W}}{dt}=-\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad}p \quad . . . . (1).$$

[1] Dissertation Universität Göttingen 1939 (D 7). Berichterstatter: Prof. Dr. L. Prandtl. Der zweite Teil dieses Aufsatzes: „Der schiebende elliptische Tragflügel" (S. 81 ff.) wurde von der Lilienthal-Gesellschaft als Bewerbung zur Aufgabe 1 (Flugzeugbau) des Preisausschreibens 1938/39 angenommen und mit einem Preis ausgezeichnet. Eine ausführlichere Fassung der hier veröffentlichten Arbeit befindet sich bei der Bibliothek der AVA Göttingen.

[2] Siehe das Schrifttumsverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Der Druck p sei durch die Potentialfunktion ψ in folgender Weise gegeben:

$$p - p_\infty = -\varrho V^2 \psi \qquad (2),$$

wobei p_∞ den statischen Druck im Unendlichen bedeutet. Die Funktion ψ genügt der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0 \qquad (3),$$

und man kann sie sich entstanden denken aus einer Quellsenkenbelegung der Tragfläche von der Stärke $\sigma(x_F, y_F, z_F)$ an jedem Punkte der Fläche.

$$\psi(x,y,z) = \iint \sigma(x_F, y_F, z_F) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) dF \qquad (4).$$

Darin bedeutet n die Normalenrichtung der Fläche in (x_F, y_F, z_F) und

$$R = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 + (z - z_F)^2}$$

die Entfernung des Aufpunktes (x, y, z) von dem Flächenpunkt (x_F, y_F, z_F). Nach den anfangs gemachten Feststellungen kann das Integral ersetzt werden durch ein solches, das über die Fläche der Grundellipse genommen wird.

$$\psi(x,y,z) = \iint \sigma(x_F, y_F) \frac{\partial}{\partial z_F}\left(\frac{1}{R}\right) dx_F\, dy_F \qquad (4a).$$

Die rechnerische Behandlung des vorliegenden Falles wird ermöglicht durch die Einführung von ellipsoidisch-hyperboloidischen Koordinaten [3]. Die Halbachsen der Grundellipse seien c in der y-Richtung und $c\sqrt{1-\varkappa^2}$ in der x-Richtung ($2\varkappa c$ ist dann der Abstand der Brennpunkte auf der y-Achse). Das neue Koordinatensystem wird nun eingeführt durch:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{\varrho^2 - \varkappa^2} + \frac{y^2}{\varrho^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - 1} = c^2 \\
&\frac{x^2}{\mu^2 - \varkappa^2} + \frac{y^2}{\mu^2} - \frac{z^2}{1 - \mu^2} = c^2 \qquad \infty \geq \varrho \geq 1 \geq \mu \geq \varkappa \geq \nu \geq -\varkappa \qquad (5). \\
&-\frac{x^2}{\varkappa^2 - \nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2} - \frac{z^2}{1 - \nu^2} = c^2
\end{aligned}$$

Die Auflösung der Gleichungen führt zu:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{c}{\sqrt{1-\varkappa^2}} \sqrt{\varrho^2 - \varkappa^2}\sqrt{\mu^2 - \varkappa^2}\frac{\sqrt{\varkappa^2 - \nu^2}}{\varkappa}, \qquad y = c\,\varrho\,\mu\,\frac{\nu}{\varkappa}, \\
z &= \frac{c}{\sqrt{1-\varkappa^2}} \sqrt{\varrho^2 - 1}\sqrt{1 - \mu^2}\sqrt{1 - \nu^2}
\end{aligned}\right\} \qquad (6).$$

Die Flächen ϱ bzw. μ bzw. $\nu = \text{const}$ sind konfokale Flächen 2. Grades. $\varrho = 1$ liefert die elliptische Grundfläche, $\mu = 1$ die Ebene $z = 0$ außerhalb der elliptischen Scheibe. Das Flächenelement der Grundellipse ist

$$dx\,dy = c^2 \frac{\mu^2 - \nu^2}{\sqrt{\mu^2 - \varkappa^2}\sqrt{\varkappa^2 - \nu^2}} d\mu\, d\nu \qquad (7).$$

Außerdem gilt für $\varrho = 1$

$$\frac{c}{\sqrt{1-\varkappa^2}}\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\nu^2} = \sqrt{c^2 - y^2 - \frac{x^2}{1-\varkappa^2}} \qquad (8).$$

Führt man für ϱ, μ, ν mittels der Weierstraßschen $\wp$-Funktion neue Koordinaten u, v, w in folgender Weise ein [4]

$$\wp(u) = \varrho^2 - \frac{1}{3}(1 + \varkappa^2), \quad \wp(v) = \mu^2 - \frac{1}{3}(1 + \varkappa^2), \quad \wp(w) = \nu^2 - \frac{1}{3}(1 + \varkappa^2) \qquad (9),$$

indem man die in der Gleichung

$$\frac{d\wp(u)}{du} = 2\sqrt{(\wp(u) - e_1)(\wp(u) - e_2)(\wp(u) - e_3)} \qquad (10)$$

auftretenden Größen

$$e_1 = \frac{1}{3}(2 - \varkappa^2); \quad e_2 = \frac{1}{3}(2\varkappa^2 - 1); \quad e_3 = -\frac{1}{3}(1 + \varkappa^2); \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0 \qquad (11)$$

d. h.

$$\sqrt{e_1-e_2}=\sqrt{1-\varkappa^2}\,;\quad \sqrt{e_2-e_3}=\varkappa;\quad \sqrt{e_1-e_3}=1$$

setzt, so wird

$$u=\int_{\infty}^{\wp(u)}\frac{d\,p}{2\sqrt{p-e_1}\sqrt{p-e_2}\sqrt{p-e_3}}=\int_{\infty}^{\varrho}\frac{d\,\varrho}{\sqrt{\varrho^2-1}\sqrt{\varrho^2-\varkappa^2}}\quad\ldots\ldots\quad(12)$$

und die Laplacesche Gleichung lautet

$$[\wp(v)-\wp(w)]\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+[\wp(w)-\wp(u)]\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}+[\wp(u)-\wp(v)]\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2}=0\quad\ldots\ldots\quad(13).$$

Setzt man die Lösung in folgender Form an:

$$\psi(u,v,w)=E(u)\,E(v)\,E(w)\quad\ldots\ldots\quad(14),$$

so erhält man für jede der drei Funktionen E die Laméschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2E(u)}{d\,u^2}=[A+B\wp(u)]\,E(u)\quad\ldots\ldots\quad(15)$$

mit den Separationskonstanten A und B. Wir setzen jetzt

$$B=n\,(n+1)\quad\text{und}\quad v_m=-\frac{A}{1+\varkappa^2}+\frac{B}{3}$$

und führen mittels Gl. (9) wieder μ,ν,ϱ ein. Dann lautet die Lamésche Differentialgleichung [5]

$$\left.\begin{aligned}(\mu^2-\varkappa^2)(\mu^2-1)\frac{d^2E_n{}^m(\mu)}{d\,\mu^2}+\mu\,(2\mu^2-\varkappa^2-1)\frac{d\,E_n{}^m(\mu)}{d\,\mu}\\+[(1+\varkappa^2)\,v_m-n\,(n+1)\,\mu^2]\,E_n{}^m(\mu)=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(15\text{a}).$$

Für $B=n\,(n+1)$ gibt es genau $2n+1$ Werte v_m, für die $E_n{}^m(\mu)$ die Form hat [6]

$$E_n{}^m(\mu)=\sqrt{1-\mu^2}^{\,\varepsilon_1}\sqrt{\mu^2-\varkappa^2}^{\,\varepsilon_2}\,\mu^{\varepsilon_3}\,(a_0\,\mu^{n-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3}+a_2\,\mu^{n-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-2}+\cdots);\qquad \varepsilon_\alpha=\begin{cases}0\\1\end{cases}\quad(16).$$

$0_n{}^m(\mu)=a_0\mu^{n-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3}+\cdots$ ist ein in μ gerades Polynom vom Grade $n-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3$. Die Werte v_m sind voneinander verschiedene Lösungen einer algebraischen Gleichung, die sich aus der Bedingung ergibt, daß $0_n{}^m(\mu)$ ein Polynom ist. Mit Rücksicht auf die späteren Rechnungen sei $E_n{}^m(\nu)$ folgendermaßen definiert:

$$E_n{}^m(\nu)=\sqrt{1-\nu^2}^{\,\varepsilon_1}\left[\frac{\sqrt{\varkappa^2-\nu^2}}{\varkappa}\right]^{\varepsilon_2}\left[\frac{\nu}{\varkappa}\right]^{\varepsilon_3}0_n{}^m(\nu)=\Delta\varphi^{\varepsilon_1}(-\cos\varphi)^{\varepsilon_2}(\sin\varphi)^{\varepsilon_3}\,0_n{}^m(\varphi)\quad(16\text{a}),$$

wenn man

$$\frac{\nu}{\varkappa}=\sin\varphi;\qquad\frac{\sqrt{\varkappa^2-\nu^2}}{\varkappa}=-\cos\varphi;\qquad\Delta\varphi=\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}\quad\ldots\ldots\quad(17)$$

setzt. Die mit Gl. (13) gewonnene Lösung

$$\psi'_n{}^m(\mu,\nu,\varrho)=E_n{}^m(\mu)\,E_n{}^m(\nu)\,E_n{}^m(\varrho)\quad\ldots\ldots\quad(18)$$

läßt sich auch noch in anderer Form darstellen [7]. Bezeichnet man nämlich die Nullstellen des Polynoms $0_n{}^m(\mu)$ mit $\varrho_s{}^2$, so sieht man leicht aus den Gln. (5) und (6), daß

$$E_n{}^m(\mu)\,E_n{}^m(\nu)\,E_n{}^m(\varrho)=\frac{\text{const}}{c^n}\left\{1\;\begin{matrix}x & xy & \\ y & yz & xyz\\ z & zx & \end{matrix}\right\}\prod_{\varrho_s{}^2}\left(\frac{x^2}{\varrho_s{}^2-\varkappa^2}+\frac{y^2}{\varrho_s{}^2}+\frac{z^2}{\varrho_s{}^2-1}-c^2\right)\quad(19).$$

Aus der Klammer { } ist jeweils einer der darin enthaltenen Faktoren zu wählen, und das Produkt $\prod_{\varrho_s{}^2}$ ist über alle zu $0_n{}^m(\mu)$ gehörigen Nullstellen zu bilden. Man kann die Nullstellen $\varrho_s{}^2$ auch direkt bestimmen, indem man auf die rechte Seite der Gl. (19) den Laplaceschen Operator $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ anwendet und das Resultat gleich Null setzt. Das liefert folgendes Gleichungssystem für die $\varrho_s{}^2$:

$$\frac{3^{\varepsilon_2}}{\varrho_s{}^2-\varkappa^2}+\frac{3^{\varepsilon_3}}{\varrho_s{}^2}+\frac{3^{\varepsilon_1}}{\varrho_s{}^2-1}+\sum_{q\neq s}\frac{4}{\varrho_s{}^2-\varrho_q{}^2}=0\qquad\begin{aligned}s&=1,2,\ldots\frac{m}{2}\\ m&=n-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3\end{aligned}\quad\ldots\quad(20).$$

Die Potentialfunktionen in der Form (18) bzw. (19) sind sogenannte ,innere' Lösungen der Potentialgleichung, die für unsere Zwecke nicht brauchbar sind, da wir Potentialfunktionen benötigen, die im Unendlichen durchweg verschwinden. Diese erhält man, wenn man in der Veränderlichen ϱ nicht die Lamésche Funktion erster Art sondern die zweiter Art nimmt. Das ist diejenige Lösung der Laméschen Gl. (15a), die für $\varrho \to \infty$ wie $\frac{\text{const}}{\varrho^{n+1}} \to 0$ geht. Sie hat die Form

$$F_n^m(\varrho) = E_n^m(\varrho) \int_{\varrho}^{\infty} \frac{d\varrho}{[E_n^m(\varrho)]^2 \sqrt{\varrho^2-1}\sqrt{\varrho^2-\varkappa^2}} \quad \ldots \ldots \quad (21).$$

Das auftretende Integral läßt sich stets auf elliptische Integrale erster und zweiter Gattung allein zurückführen. Die äußere Lösung der Potentialgleichung sieht nun folgendermaßen aus:

$$\psi_n^m(\varrho,\mu,\nu) = E_n^m(\mu)\,E_n^m(\nu)\,F_n^m(\varrho) = E_n^m(\mu)\,E_n^m(\nu)\,E_n^m(\varrho) \int_{\varrho}^{\infty} \frac{d\varrho}{[E_n^m(\varrho)]^2 \sqrt{\varrho^2-1}\sqrt{\varrho^2-\varkappa^2}} \quad (22).$$

Aus (19) wird dann

$$\psi_n^m(x,y,z) = \frac{\text{const}}{c^n} \left\{\begin{matrix} & x & x\,y & \\ 1 & y & y\,z & x\,y\,z \\ & z & z\,x & \end{matrix}\right\} \prod_{\varrho_s^2} \left(\frac{x^2}{\varrho_s^2-\varkappa^2} + \frac{y^2}{\varrho_s^2} + \frac{z^2}{\varrho_s^2-1} - c^2\right) \int_{\varrho}^{\infty} \frac{d\varrho}{[E_n^m(\varrho)]^2 \sqrt{\varrho^2-1}\sqrt{\varrho^2-\varkappa^2}} \quad (23).$$

Aus der Darstellung der Potentialfunktion durch (4a) als Quellsenkenbelegung auf der elliptischen Scheibe geht hervor, daß die Potentialfunktionen in der Ebene $z=0$ im Außengebiet der Scheibe Null sein müssen. Nach (23) müssen also solche ψ_n^m genommen werden, die den Faktor z enthalten, d. h., von den Laméschen Funktionen kommen nur solche in Frage, die von der Form sind (vgl. (6) u. (16)):

$$E_n^m(\mu) = \sqrt{1-\mu^2}\,M_n^m(\mu) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24).$$

Die Laméschen Funktionen besitzen ähnliche Orthogonalitätseigenschaften wie die Kugelfunktionen [8]:

$$\int_{-\varkappa}^{+\varkappa} E_n^m(\nu)\,E_n^t(\nu) \frac{d\nu}{\sqrt{1-\nu^2}\sqrt{\varkappa^2-\nu^2}} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } m \neq t \\ \mathfrak{J}_n^m, & \text{wenn } m = t \end{cases} \quad \ldots \ldots \quad (25),$$

$$\int_{\mu=\varkappa}^{1} \int_{\nu=-\varkappa}^{+\varkappa} E_n^m(\mu)\,E_n^m(\nu)\,E_s^t(\mu)\,E_s^t(\nu) \frac{\mu^2-\nu^2}{\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\nu^2}\sqrt{\mu^2-\varkappa^2}\sqrt{\varkappa^2-\nu^2}}\,d\mu\,d\nu = \begin{cases} 0, \text{ wenn } n \neq s \\ \quad \text{oder } m \neq t \\ I_n^m, \text{ wenn } n = s \\ \quad \text{und } m = t \end{cases} \quad (26).$$

Um den Zusammenhang mit Gl. (4a) zu gewinnen, benutze ich folgende Darstellung von $\frac{1}{R}$ $\left(R = \sqrt{(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2 + (z-z_F)^2}\right)$ [9]:

$$\frac{1}{R} = \frac{\pi}{2c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} E_n^m(\mu)\,E_n^m(\nu)\,F_n^m(\varrho)\,E_n^m(\mu_F)\,E_n^m(\nu_F)\,E_n^m(\sigma_F) \qquad \varrho > \sigma_F \quad \ldots \quad (27),$$

dann ist

$$\frac{\partial}{\partial z_F}\left(\frac{1}{R}\right)_{z_F=0} = \frac{\pi\sqrt{1-\varkappa^2}}{2c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m} E_n^m(\mu)\,E_n^m(\nu)\,F_n^m(\varrho)\,E_n^m(\mu_F)\,E_n^m(\nu_F) \frac{M_n^m(1)}{\sqrt{1-\mu_F^2}\sqrt{1-\nu_F^2}},$$

wobei dann nur noch über $E_n^m(\mu)$ von der Form (24) zu summieren ist. Nehme ich jetzt an, daß die Quellsenkenverteilung auf der elliptischen Scheibe am Rande mit der Wurzel aus dem Randabstand, d. h. mit $\sqrt{1-\mu_F^2}$ gegen Null geht, so kann ich $\sigma(x_F, y_F)$ nach Produkten von Laméschen-Funktionen der Art (24) entwickeln:

$$\sigma(x_F, y_F) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t} A_s^t\,E_s^t(\mu_F)\,E_s^t(\nu_F) \quad \ldots \ldots \quad (28).$$

Bilde ich jetzt das Integral (4a), so ergibt sich auf Grund der Orthogonalität der Laméschen Produkte (vgl. (26)):

$$\psi(\mu,\nu,\varrho) = \frac{\pi}{2}\sqrt{1-\varkappa^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m} A_n^m\,I_n^m\,M_n^m(1)\,E_n^m(\mu)\,E_n^m(\nu)\,F_n^m(\varrho) \quad \ldots \quad (29).$$

Gl. (29) zeigt, daß die Potentialfunktion (4a) eine bestimmte Linearkombination der Funktionen $\psi_n{}^m$ ist, die zu untersuchen im folgenden die Aufgabe sein wird.

Die Darstellung der Potentialfunktion $\psi_n{}^m$ als bestimmtes Integral im Komplexen. Setzt man

$$X = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)} \sqrt{\wp(t) - e_\alpha}\,\sqrt{\wp(u) - e_\alpha}\,\sqrt{\wp(v) - e_\alpha}\,\sqrt{\wp(w) - e_\alpha} \quad . \; . \; . \quad (30)$$

(e_α durch Gl. (11) definiert) oder mit Berücksichtigung von (6) und (9)

$$X = \frac{\sqrt{\wp(t) - e_2}}{\sqrt{e_2 - e_1}\sqrt{e_2 - e_3}}\,\frac{x}{c} + \frac{\sqrt{\wp(t) - e_3}}{\sqrt{e_3 - e_1}\sqrt{e_3 - e_2}}\,\frac{y}{c} + \frac{\sqrt{\wp(t) - e_1}}{\sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3}}\,\frac{z}{c} \quad . \; . \; . \; . \quad (31),$$

so kann man zeigen, daß

$$\psi_n{}^m(x, y, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\pi_1}^{\pi_2} Q_n(X)\, E_n{}^m(t)\, dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32),$$

$$E_n{}^m(t) = \sqrt{\wp(t) - e_1}\left(\frac{\sqrt{\wp(t) - e_2}}{i\sqrt{e_2 - e_3}}\right)^{\varepsilon_2}\left(\frac{-\sqrt{\wp(t) - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}}\right)^{\varepsilon_3} \cdot \text{Polynom}\,[\wp(t)]\,; \quad \varepsilon_\alpha = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad . \; . \quad (33),$$

wenn man als Integrationsweg von π_1 nach π_2 eine Schleife um die $X = \pm 1$ entsprechenden Punkte der komplexen t-Ebene nimmt. $Q_n(X)$ genügt der Legendreschen Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} (1 - X^2)\frac{d^2 Q_n(X)}{dX^2} - 2X\frac{dQ_n(X)}{dX} \\ + n(n+1)\,Q_n(X) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (34)$$

und $E_n{}^m(t)$ genügt der Laméschen Differentialgleichung (15). Es gilt dann nämlich

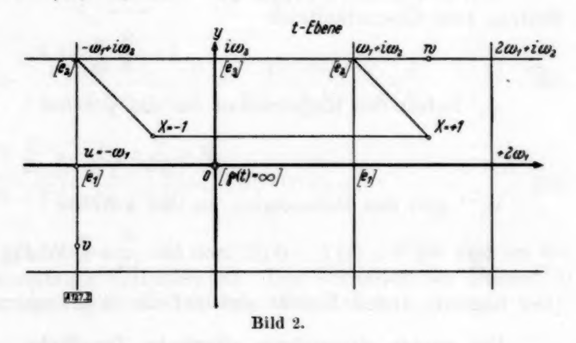


Bild 2.

$$\frac{\partial^2 Q_n(X)}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 Q_n(X)}{\partial t^2} = n(n+1)\,[\wp(u) - \wp(t)]\,Q_n(X) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

für je zwei beliebige der Variablen t, u, v, w, d. h.

$$E_n{}^m(t)\left[\frac{\partial^2 Q_n(X)}{\partial u^2} - \{A_m + n(n+1)\wp(u)\}\,Q_n(X)\right] = E_n{}^m(t)\frac{\partial^2 Q_n(X)}{\partial t^2} - Q_n(X)\frac{d^2 E_n{}^m(t)}{dt^2} \quad . \; . \quad (36)$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\psi_n{}^m(u,v,w) - [A_m + n(n+1)\wp(u)]\,\psi_n{}^m(u,v,w) = \frac{1}{2\pi i}\left[E_n{}^m(t)\frac{\partial Q_n(X)}{\partial t} - Q_n(X)\frac{dE_n{}^m(t)}{dt}\right]_{\pi_1}^{\pi_2} \quad (37).$$

Dies gilt auch, wenn ich u durch v oder w ersetze. Der Integrationsweg ist nun so gewählt, daß

$$\left[E_n{}^m(t)\frac{\partial Q_n(X)}{\partial t} - Q_n(X)\frac{dE_n{}^m(t)}{dt}\right]_{\pi_1}^{\pi_2} = 0$$

ist, d. h. $\psi_n{}^m$ genügt in jeder der drei Variablen u, v, w der Laméschen Differentialgleichung (15) und ist demnach eine dritte Darstellung der durch (22) definierten Potentialfunktion. Die Punkte $X = \pm 1$ in der t-Ebene sind gegeben durch

$$t = v + w + u \quad (X = -1); \qquad t = v + w - u \quad (X = +1) \quad . \; . \; . \; . \quad (38).$$

Auf der elliptischen Scheibe ($\varrho = 1$) ist $\wp(u) = e_1$, d. h.

$$u = \int_{\infty}^{1} \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - 1}\sqrt{\varrho^2 - \varkappa^2}} = -\omega_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39).$$

Als Beispiel sei nachfolgend die Potentialfunktion $\psi_1{}^1$ angegeben. Die einzige mit dem Faktor $\sqrt{\varrho^2 - 1}$ versehene Lamésche Funktion erster Art und ersten Grades ist

$$E_1{}^1(\varrho) = \sqrt{\varrho^2 - 1}\,.$$

Nach (22) bzw. (23) lautet die Potentialfunktion dann

$$\psi_1^{\,1}(\varrho,\mu,\nu)=\sqrt{\varrho^2-1}\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\nu^2}\int\limits_{\varrho}^{\infty}\frac{d\varrho}{(\varrho^2-1)\sqrt{\varrho^2-1}\sqrt{\varrho^2-\varkappa^2}}$$

bzw.

$$\psi_1^{\,1}(x,y,z)=\frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{c}\cdot z\int\limits_{\varrho}^{\infty}\frac{d\varrho}{(\varrho^2-1)\sqrt{\varrho^2-1}\sqrt{\varrho^2-\varkappa^2}}.$$

Auftrieb und Auftriebsmomente. Der Auftrieb ist gegeben durch

$$A=\iint\limits_{F_{\mathrm{Ell}}}(p_{\mathrm{u}}-p_{\mathrm{ob}})\,dx\,dy=\varrho V^2\iint(\psi_{\mathrm{ob}}-\psi_{\mathrm{u}})\,dx\,dy \quad \ldots \quad (40).$$

Dabei ist

$$\left.\begin{aligned}\psi_n{}^m|_{\varrho=1}&=E_n{}^m(\mu)\,E_n{}^m(\nu)\,F_n{}^m(1)\\&=\frac{\pm E_n{}^m(\mu)\,E_n{}^m(\nu)}{M_n{}^m(1)\sqrt{1-\varkappa^2}}=\pm\frac{1}{c}\sqrt{c^2-y^2-\frac{x^2}{1-\varkappa^2}}\,\frac{M_n{}^m(\mu)\,M_n{}^m(\nu)}{M_n{}^m(1)}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (41).$$

Auf Grund der Orthogonalität der Laméschen Funktionen (vgl. 26) liefert nur $\psi_1{}^1$ einen Beitrag zum Gesamtauftrieb

$$A=\frac{8}{3}\,\frac{\varrho}{2}\,V^2 F_{\mathrm{Ell}} \quad \ldots \quad (42).$$

$\psi_2{}^1$ liefert das Kippmoment um die y-Achse

$$M=\frac{8}{15}\,c\sqrt{1-\varkappa^2}\,\frac{\varrho}{2}\,V^2 F_{\mathrm{Ell}} \quad \ldots \quad (43).$$

$\psi_2{}^{-1}$ gibt das Rollmoment um die x-Achse

$$L=\frac{8}{15}\,c\,\frac{\varrho}{2}\,V^2 F_{\mathrm{Ell}} \quad \ldots \quad (44).$$

(Der negative Index bezieht sich auf die in y ungeraden Funktionen.)

Die gerade angeströmte elliptische Tragfläche. Die elliptische Tragfläche sei jetzt in Richtung der positiven x-Achse angeströmt mit der Geschwindigkeit V. Gl. (1) liefert nun die Möglichkeit, die von dem Druckpotential ψ im Raume und insbesondere an der tragenden Fläche induzierten Geschwindigkeiten zu berechnen. Die z-Komponente der Gl. (1) lautet im stationären Fall

$$(V+u)\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}=V^2\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \ldots \quad (45).$$

Größen, die klein von höherer Ordnung sind, werden vernachlässigt, d. h.

$$\frac{\partial w}{\partial x}=V\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \ldots \quad (46).$$

Die z-Komponente w des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{w}$ soll im folgenden kurz mit Abwind bezeichnet werden. An der elliptischen Fläche erhalte ich den Abwind, wenn ich Gl. (46) für $z=0$ und $y\leq c$ über x integriere:

$$\frac{w}{V}=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{\partial \psi}{\partial z}\,dx \quad \ldots \quad (47).$$

Die Berechnung des Integrals wird auf elementarem Wege sehr mühsam und unübersichtlich bei größerem n. Wesentlich einfacher gelangt man zum Ziel, wenn man die Darstellung (32) der Potentialfunktion $\psi_n{}^m$ benutzt. Bildet man $\frac{\partial \psi_n{}^m}{\partial z}$ durch Differentiation unter dem Integralzeichen, so wird aus (47)

$$\left.\begin{aligned}\frac{w_n{}^m}{V}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{x}\oint\frac{\partial}{\partial z}Q_n\Bigg(&\frac{\sqrt{\wp(t)-e_2}}{\sqrt{e_2-e_1}\sqrt{e_2-e_3}}\,\frac{x}{c}+\frac{\sqrt{\wp(t)-e_3}}{\sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_3-e_2}}\cdot\frac{y}{c}\\&+\frac{\sqrt{\wp(t)-e_1}}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}}\cdot\frac{z}{c}\Bigg)E_n{}^m(t)\,dt\,dx\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (48).$$

Nun ist

$$\frac{\partial Q_n(X)}{\partial z} = \frac{d Q_n(X)}{d X}\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{d Q_n(X)}{d X}\frac{\sqrt{\wp(t)-e_1}}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}}\frac{1}{c},$$

$$\frac{\partial Q_n(X)}{\partial x} = \frac{d Q_n(X)}{d X}\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{d Q_n(X)}{d X}\frac{\sqrt{\wp(t)-e_2}}{\sqrt{e_2-e_1}\sqrt{e_2-e_3}}\frac{1}{c}.$$

D. h.

$$\frac{\partial Q_n(X)}{\partial z} = i\varkappa\frac{\partial Q_n(X)}{\partial x}\frac{\sqrt{\wp(t)-e_1}}{\sqrt{\wp(t)-e_2}} \quad \text{. . . . . . (49).}$$

Setze ich dies in (48) ein und führe die Integration über x aus, so erhalte ich, da $\lim Q_n(X)=0$ für $X\to\infty$ ist:

$$\frac{w_n{}^m}{V} = \frac{1}{2\pi i}\,i\varkappa\int_{\square} Q_n(X)\frac{\sqrt{\wp(t)-e_1}}{\sqrt{\wp(t)-e_2}}E_n{}^m(t)\,dt \quad \text{. . . . . (50).}$$

Für $Q_n(X)$ führe ich jetzt die Neumannsche Darstellung ein:

$$Q_n(X) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(Y)}{X-Y}dY \quad \text{. . . . . (51).}$$

Analog $X(t)$ setze ich nun

$$Y(s) = \frac{\sqrt{\wp(s)-e_2}}{\sqrt{e_2-e_1}\sqrt{e_2-e_3}}\frac{x}{c} + \frac{\sqrt{\wp(s)-e_3}}{\sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_3-e_2}}\frac{y}{c} + \frac{\sqrt{\wp(s)-e_1}}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}}\frac{z}{c} \quad \text{. . . (52),}$$

so daß ich für (50) erhalte:

$$\frac{w_n{}^m}{V} = \frac{1}{2\pi i}\,i\varkappa\int_{\square}\frac{1}{2}\int_{s}\frac{P_n(Y(s))}{X(t)-Y(s)}\frac{dY}{ds}\frac{\sqrt{\wp(t)-e_1}}{\sqrt{\wp(t)-e_2}}E_n{}^m(t)\,ds\,dt \quad \text{. . . . . (53).}$$

Der Integrand hat Pole an den Stellen $t=s$, da dort $X(t)-Y(s)=0$ ist und an der Stelle $t=\omega_1+i\omega_2$, wo $\sqrt{\wp(t)-e_2}$ eine einfache Nullstelle hat. Das Verhalten der Nenner in Nähe der Nullstelle wird bestimmt aus der Taylorentwicklung. Das liefert

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{p(t)-e_2} &= [t-(\omega_1+i\omega_2)]\cdot\left(\frac{d}{dt}\sqrt{p(t)-e_2}\right)_{t=\omega_1+i\omega_2}+\cdots\\ &= -[t-(\omega_1+i\omega_2)]\sqrt{e_2-e_1}\sqrt{e_2-e_3}+\cdots\end{aligned}\right\} \quad \text{. . . . . (54)}$$

unter Berücksichtigung von Gl. (10), sowie

$$X(t)-Y(s) = (t-s)\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_{t=s}+\cdots = (t-s)\frac{\partial Y}{\partial s}+\cdots \quad \text{. . . . . (55)}$$

nach Gl. (52). Führt man jetzt die Integration von $s=v+w+u$ bis $s=v+w-u$ entsprechend $Y=-1$ bis $Y=+1$ (vgl. 38) durch, so wird

$$\frac{1}{2}\int\frac{P_n(Y(s))}{X(\omega_1+i\omega_2)-Y(s)}\frac{dY}{ds}ds = Q_n(X(\omega_1+i\omega_2)) \quad \text{. . . . . (56).}$$

Bei

$$\int P_n(Y(s))\frac{\sqrt{\wp(s)-e_1}}{\sqrt{\wp(s)-e_2}}E_n{}^m(s)\,ds \quad \text{. . . . . (57)}$$

ist zu bemerken, daß der Integrand für $\varrho=1$, d. h. $u=-\omega_1$ die Periode $2\omega_1$ hat, so daß ich den Integrationsweg so verschieben kann, daß s von $i\omega_2-\omega_1$ bis $i\omega_2+\omega_1$ läuft (vgl. Bild 2), was $\varepsilon=-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ entspricht, wenn ich $\sqrt{\wp(s)-e_3}=-\varkappa\sin\varepsilon$, d. h. $ds=\frac{d\varepsilon}{\Delta\varepsilon}$ $(\Delta\varepsilon=\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varepsilon})$ setze. Weiterhin sei

$$\frac{x}{c\sqrt{1-\varkappa^2}}=\xi,\quad \frac{y}{c}=\eta \quad \text{. . . . . . . (58).}$$

Es ergibt sich dann wegen

$$X(\omega_1+i\omega_2) = -\frac{\sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_3-e_2}}\frac{y}{c}=\eta \qquad (\wp(\omega_1+i\omega_2)=e_2) \quad \text{. . . . . (59)}$$

und nach (33)

$$E_n{}^m(\omega_1+i\omega_2) = i\,E_n{}^m(\lambda)_{\lambda=\varkappa} \quad \text{. . . . . (60)}$$

für die Abwindfunktion auf der elliptischen Scheibe

$$\frac{w_n{}^m}{V} = E_n{}^m(\varkappa)\, Q_n(\eta) - \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n(\xi\cos\varepsilon + \eta\sin\varepsilon)\, M_n{}^m(\varepsilon)\, \Delta\varepsilon\, \frac{d\varepsilon}{\cos\varepsilon} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (61).$$

Man erhält als Koeffizienten im Polynom von ξ und η vollständige elliptische Integrale 1. und 2. Gattung. Die Berechnung der Abwindfunktion im Fall $n = 1$ sieht folgendermaßen aus:

$$E_1{}^1(\lambda) = \sqrt{1-\lambda^2}\,, \qquad M_1{}^1(\varepsilon) = 1\,,$$

$$P_1(Y) = Y, \qquad Q_1(X) = \frac{X}{2}\ln\frac{X+1}{X-1} - 1.$$

Aus (61) ergibt sich

$$\frac{w_1{}^1(\xi,\eta)}{V} = \sqrt{1-\varkappa^2}\, Q_1(\eta) - \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\xi\cos\varepsilon + \eta\sin\varepsilon)\frac{\Delta\varepsilon}{\cos\varepsilon}\, d\varepsilon\,,$$

d. h.

$$\frac{w_1{}^1(\xi,\eta)}{V} = \sqrt{1-\varkappa^2}\, Q_1(\eta) - \xi\, E\left(\frac{\pi}{2}\right); \qquad E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varepsilon\, d\varepsilon\,.$$

Die tragende Fläche. Die Gestalt der Fläche sei durch

$$z = z(x, y)$$

gegeben. Die Neigung der Fläche in x-Richtung muß mit der Richtung der Strömung an demselben Punkt übereinstimmen, d. h.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = \frac{w(x,y)}{V} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (62).$$

Daraus ergibt sich für $z = z(x, y)$

$$z(x,y) = \frac{1}{V}\int^{x} w(x,y)\, dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (63),$$

wobei die untere Integrationsgrenze beliebig ist; ich setze sie gleich Null und füge zum Wert des Integrals eine beliebige Funktion in y hinzu:

$$z(x,y) = \frac{1}{V}\int\limits_0^{x} w(x,y)\, dx + g(y) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (63\text{a}).$$

Die tragende Linie, der induzierte Widerstand und die Saugkraft. Der Kürze halber sei hier nur verwiesen auf die entsprechenden Abschnitte in der Arbeit von W. Kinner [2], in der diese Fragen ausführlich behandelt sind. Die Ergebnisse lassen sich ohne Schwierigkeit auf die hier behandelte elliptische Scheibe übertragen. Die tragende Linie, durch die man sich die tragende Fläche ersetzt denkt, erhält man, indem man die Auftriebselemente durch Integration parallel zur x-Achse zusammenfaßt:

$$a_n{}^m(\eta) = \int\limits_{x_R}^{+x_R} (p_u - p_{ob})\, dx = 2\,\varrho\, V^2 \int\limits_{x_R}^{+x_R} \psi_n{}^m\Big|_{\varrho=1}\, dx\,.$$

Es ergibt sich dann z. B.:

$$\left.\begin{aligned} a_1{}^1(\eta) &= 4\,\pi\,\frac{\varrho}{2}\, V^2\, c\,\sqrt{1-\varkappa^2}\,\frac{P_0(\eta) - P_2(\eta)}{3}\,, \\ a_2{}^1(\eta) &\equiv 0\,, \\ a_3{}^s(\eta) &= 4\,\pi\,\frac{\varrho}{2}\, V^2\, c\,\sqrt{1-\varkappa^2}\,\frac{P_2(\eta) - P_4(\eta)}{3}\,(\varkappa^2 - \varrho_s{}^2)\,, \\ a_4{}^s(\eta) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (64).$$

Die Potentialfunktionen zweiter Art. Die im vorangehenden behandelten Potentialfunktionen lassen sich in beliebiger Weise linear kombinieren. Man erhält dann für Auftrieb, Auftriebsmomente und den Abwind w die entsprechenden Linearkombinationen. Die bisher behandelten Potentialfunktionen liefern die aerodynamischen Größen einer entsprechend gewölbten Tragfläche bei stoßfreiem Eintritt der Strömung, d. h. bei einem bestimmten Anstellwinkel, bei dem keine Umströmung der Vorderkante eintritt. Den beliebigen Anstellwinkel erhält man, wenn man eine ebene elliptische Scheibe mit ihrer Strömung überlagert, bei der bekanntlich die Vorderkante Saugkante ist, d. h. die Auftriebsdichte geht dort gegen Unendlich. Die Potentialfunktionen erster Art gehen jedoch alle am Scheibenrand mit der Wurzel aus dem Randabstand gegen Null. Es ist jetzt also die Aufgabe, Potentialfunktionen zu suchen, die die o. a. Eigenschaften besitzen. Diese erhält man, wenn man auf die Potentialfunktionen erster Art bei konstantem x, y, z und $\varkappa^2$ folgenden Grenzübergang anwendet (vgl. hierzu W. Kinner [2]):

$$\Phi_n{}^m = \frac{1}{c^{n-1}} \frac{d}{d c} [c^n \psi_n{}^m (x, y, z, c)] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (65).$$

Diese Potentialfunktionen $\Phi_n{}^m$ haben die Eigenschaft, am ganzen Rand der Scheibe Unendlich zu werden. Wegen der Bedingung des glatten Abflusses an der Hinterkante der Fläche ist es später notwendig, die Funktionen in entsprechender Weise linear zu kombinieren.

Die Abwindfunktionen zweiter Art. Entsprechend Gl. (65) erhalte ich die Abwindfunktionen durch Anwendung des Operators $\frac{1}{c^{n-1}} \frac{d}{dc} c^n$ auf Gl. (61). Dabei ist folgende Beziehung zu beachten:

$$\frac{1}{c^{n-1}} \frac{d}{dc} [c^n P_n(\eta)] = n P_n(\eta) - \eta \frac{d P_n(\eta)}{d\eta} = - \frac{d P_{n-1}(\eta)}{d\eta}; \quad \eta = \frac{y}{c}.$$

Dasselbe gilt auch für $P_n(Y)$ und $Q_n(\eta)$. Aus (61) wird dann

$$\frac{w_n{}^{m\,II}}{V} = - E_n{}^m(\varkappa) \frac{d Q_{n-1}(\eta)}{d\eta} + \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d P_{n-1}(Y)}{d Y} M_n{}^m(\varepsilon) \Delta \varepsilon \frac{d\varepsilon}{\cos \varepsilon} \quad \ldots \ldots (66).$$

Bei der Behandlung der zweiten Grundaufgabe, d. h. bei der Berechnung einer vorgegebenen Tragfläche, braucht man Potentialfunktionen, deren Abwindfunktionen an der Scheibe von x unabhängig sind. Nach (46) bedeutet dies wegen $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$, daß

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{\varrho = 1} \equiv 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (67)$$

sein muß. Ich setze jetzt mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $b_n{}^m$

$$\Phi_n(x, y, z) = \sum_m b_n{}^m \Phi_n{}^m(x, y, z), \quad \Phi_{-n}(x, y, z) = \sum_{-m} b_n{}^{-m} \Phi_n{}^{-m}(x, y, z) \quad \ldots (68).$$

Dementsprechend ist

$$w_n = \sum_m b_n{}^m w_n{}^{m\,II}, \quad w_{-n} = \sum_{-m} b_n{}^{-m} w_n{}^{-m\,II} \quad \ldots \ldots \ldots (68a).$$

$w_n(x, y)$ wird als Abwindfunktion der Potentialfunktion zweiter Art Φ_n bezeichnet. Nach (68a) und (66) ist

$$\frac{w_n(x, y)}{V} = - \sum_m b_n{}^m E_n{}^m(\varkappa) \frac{d Q_{n-1}(\eta)}{d\eta} + \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d P_{n-1}(Y)}{d Y} \sum_m b_n{}^m M_n{}^m(\varepsilon) \Delta \varepsilon \frac{d\varepsilon}{\cos \varepsilon} \quad \ldots (69).$$

Die Koeffizienten $b_n{}^m$ sollen nun so bestimmt werden, daß w_n eine Funktion von η allein wird. Der erste Term in (69) hängt bereits nur von η ab; es muß also der zweite Term, der im allgemeinen auch von ξ abhängt, eine Funktion nur von η sein. $\frac{d P_{n-1}(Y)}{d Y}$ ist ein Polynom in Y mit Gliedern der Form

$$Y^{n-2p} = [\xi \cos \varepsilon + \eta \sin \varepsilon]^{n-2p},$$

ist also eine Summe von Gliedern der Form

$$(\cos \varepsilon)^{n-2p-\alpha} (\sin \varepsilon)^\alpha \xi^{n-2p-\alpha} \eta^\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (70).$$

Für die folgende Überlegung nehme ich an, $M_n^m(\varepsilon)$ sei in ε gerade; dann verschwinden alle Glieder mit ungeraden Potenzen von $\sin\varepsilon$ bei der Integration von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$. Ist a aber gerade, so ist

$$(\sin\varepsilon)^a = 1 + \text{Summe von cos-Gliedern.}$$

Setze ich dies in (70) ein, so besteht also Y^{n-2p} aus folgenden Summanden:

$$(\cos\varepsilon)^{n-2q}\,\xi^{n-2p-a}\,\eta^a \quad \ldots \ldots \quad (70\text{a})$$

mit der Bedingung, daß

$$n-2p-a \le n-2q \le n-2p \quad \ldots \ldots \quad (71)$$

ist. Setze ich

$$\sigma = \frac{n}{2} \text{ bzw. } = \frac{n+1}{2} \qquad \sigma\text{: ganz} \quad \ldots \ldots \quad (72)$$

und verlange, daß

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos\varepsilon)^{n-2q} \sum_m b_n^m M_n^m(\varepsilon)\,\Delta\varepsilon\,\frac{d\varepsilon}{\cos\varepsilon} = 0; \quad q = 1, 2, \ldots (\sigma-1) \quad \ldots \quad (73),$$

so verschwinden alle Glieder, die Potenzen von $\cos\varepsilon$, d. h. Potenzen von ξ enthalten. Den einzigen nicht verschwindenden Summanden von Y^{n-2p} erhalte ich, wenn $n-2q=0$ ist, d. h. wenn erstens n gerade und nach (71) $n-2p-a=0$ ist; dieser lautet nach (70a) dann η^{n-2p} und hängt nicht mehr von ε ab, so daß ich ihn vor das Integral ziehen kann. Durch Zusammenfassung der Summanden vor dem Integral, das jetzt für jedes p denselben Wert hat, erhalte ich gemäß $\frac{d\,P_{n-1}(Y)}{d\,Y}$ in (69) für das Integral

$$\frac{d\,P_{n-1}(\eta)}{d\,\eta}\,\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sum_m b_n^m M_n^m(\varepsilon)\,\Delta\varepsilon\,\frac{d\varepsilon}{\cos\varepsilon}.$$

(Für ungerades n verschwindet das Integral.)

$M_n^{-m}(\varepsilon)$ enthält den Faktor $\sin\varepsilon$ und ist demnach in ε ungerade. Den vorangegangenen entsprechende Überlegungen führen dann zu der Bedingung

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos\varepsilon)^{n-2q-1}\sin\varepsilon \sum_{-m} b_n^{-m} M_n^{-m}(\varepsilon)\,\Delta\varepsilon\,\frac{d\varepsilon}{\cos\varepsilon} = 0, \\ q = 1, 2, \ldots, (\tau-1); \qquad \tau = \dfrac{n}{2} \text{ bzw. } = \dfrac{n-1}{2} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (74).$$

Das Integral in (69) hat dann nur für ungerades n einen von Null verschiedenen Wert. Zusammenfassend erhält man unter Berücksichtigung von $E_{2r}^m(\varkappa) = E_{2r+1}^{-m}(\varkappa) = 0$ (vgl. Gl. (16)):

$$\frac{1}{V}\,w_{2r+1}(\eta) = k_{2r+1}\,\frac{d\,Q_{2r}(\eta)}{d\,\eta}; \qquad \frac{1}{V}\,w_{2r}(\eta) = i_{2r}\,\frac{d\,P_{2r-1}(\eta)}{d\,\eta};$$

$$\frac{1}{V}\,w_{-(2r+1)}(\eta) = j_{2r+1}\,\frac{d\,P_{2r}(\eta)}{d\,\eta}; \qquad \frac{1}{V}\,w_{-2r}(\eta) = l_{2r}\,\frac{d\,Q_{2r-1}(\eta)}{d\,\eta}.$$

Hierbei ist

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle k_{2r+1} = -\sum_m b_{2r+1}^m E_{2r+1}^m(\varkappa); \quad i_{2r} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sum_m b_{2r}^m M_{2r}^m(\varepsilon)\,\Delta\varepsilon\,\frac{d\varepsilon}{\cos\varepsilon} \\ \displaystyle j_{2r+1} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\varepsilon \sum_{-m} b_{2r+1}^{-m} M_{2r+1}^{-m}(\varepsilon)\,\Delta\varepsilon\,\frac{d\varepsilon}{\cos\varepsilon}; \quad l_{2r} = -\sum_{-m} b_{2r}^{-m} E_{2r}^{-m}(\varkappa) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (75).$$

$b_n{}^m$ und $b_n{}^{-m}$ genügen den Bedingungen (73) bzw. (74). Das sind $\sigma-1$ homogene Gleichungen für die σ Unbekannten $b_n{}^m$, bzw. $\tau-1$ Gleichungen für die τ Unbekannten $b_n{}^{-m}$, die daraus bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor bestimmt werden können. Letzteren will ich so wählen, daß

$$k_{2r+1}=l_{2r}=-\sqrt{1-\varkappa^2}\,;\qquad i_{2r}=j_{2r+1}=1 \quad \ldots\ldots \quad (75\,\mathrm{a})$$

wird. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{V}\,w_{2r+1}(\eta)=-\sqrt{1-\varkappa^2}\,\frac{d\,Q_{2r}(\eta)}{d\eta}\,; && \frac{1}{V}\,w_{2r}(\eta)=\frac{d\,P_{2r-1}(\eta)}{d\,\eta}\,,\\ &\frac{1}{V}\,w_{-(2r+1)}(\eta)=\frac{d\,P_{2r}(\eta)}{d\,\eta}\,; && \frac{1}{V}\,w_{-2r}(\eta)=-\sqrt{1-\varkappa^2}\,\frac{d\,Q_{2r-1}(\eta)}{d\,\eta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (76).$$

Auftrieb, Auftriebsmomente und die tragenden Linien der Potentialfunktionen zweiter Art. Diese Größen erhält man durch Anwendung des Operators $\frac{1}{c^{n-1}}\frac{d}{dc}\,c^n$ auf die entsprechenden Größen der Potentialfunktionen erster Art (42, 43, 44, 64). Bei der vorzunehmenden Differentiation ist zu beachten, daß in dem Flächeninhalt der Ellipse F_{Ell} der Faktor c^2 enthalten ist. Dann liefert unter Berücksichtigung von (68, 75, 75a)

$$\Phi_1 \text{ den Auftrieb } \quad A=8\,\frac{\varrho}{2}\,V^2\,F_{\mathrm{Ell}} \quad \ldots\ldots \quad (77),$$

$$\Phi_2 \text{ das Kippmoment } \quad M=\frac{1}{E\left(\varkappa^2,\frac{\pi}{2}\right)}\,\frac{8}{3}\,c\,\sqrt{1-\varkappa^2}\,\frac{\varrho}{2}\,V^2\,F_{\mathrm{Ell}} \quad \ldots \quad (78),$$

$$\Phi_{-2} \text{ das Rollmoment } \quad L=\frac{8}{3}\,c\,\frac{\varrho}{2}\,V^2\,F_{\mathrm{Ell}} \quad \ldots\ldots \quad (79),$$

$$E\left(\varkappa^2,\frac{\pi}{2}\right)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varepsilon}\,d\,\varepsilon.$$

Für die tragenden Linien ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} a_1(\eta)&=4\,\pi\,\frac{\varrho}{2}\,V^2\,c\,\sqrt{1-\varkappa^2}\,P_0(\eta),\\ a_2(\eta)&\equiv 0,\\ a_3(\eta)&=4\,\pi\,\frac{\varrho}{2}\,V^2\,c\,\sqrt{1-\varkappa^2}\,P_2(\eta),\\ a_4(\eta)&\equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (80).$$

Die zweite Grundaufgabe der Tragflügeltheorie. Es handelt sich jetzt darum, die aerodynamischen Größen eines beliebig vorgegebenen elliptischen Tragflügels zu berechnen vermittels der im vorangegangenen behandelten Potentialfunktionen erster und zweiter Art. Die zu erfüllende Randbedingung ist gegeben durch (62):

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=\frac{w(x,y)}{V}=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{\partial\psi}{\partial z}\,dx \quad \ldots\ldots \quad (62\,\mathrm{a}).$$

Differentiation dieser Gleichung führt zu (46)

$$\frac{\partial w}{\partial x}=V\,\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad \ldots\ldots \quad (46).$$

Setzt man ψ als Linearkombination von Potentialfunktionen erster und zweiter Art an

$$\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_m a_n{}^m\,\psi_n{}^m+\sum_n C_n\Phi_n+\sum_n D_n\,\Phi_{-n} \quad \ldots\ldots \quad (81),$$

so wird auf der Scheibe ($\varrho=1$)

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_{\varrho=1}=\sum_n\sum_m a_n{}^m\,\frac{\partial\psi_n{}^m}{\partial z},\qquad \text{da } \left.\frac{\partial\Phi_n}{\partial z}\right|_{\varrho=1}=\left.\frac{\partial\Phi_{-n}}{\partial z}\right|_{\varrho=1}\equiv 0 \quad \ldots \quad (81\,\mathrm{a}).$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial \psi_n{}^m}{\partial z}\bigg|_{\varrho=1} = \frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{c}\,\frac{E_n{}^m(\mu)\,E_n{}^m(\nu)}{\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\nu^2}}\left[\frac{d\,F_n{}^m(\varrho)}{d(\sqrt{\varrho^2-1})}\right]_{\varrho=1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (82).$$

Entwickelt man $\frac{\partial w}{\partial x}$ in folgender Weise nach Laméschen Produkten

$$\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\nu^2}\,\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{V}{c}\sum_n \sum_m g_n{}^m\,E_n{}^m(\mu)\,E_n{}^m(\nu); \qquad E_n{}^m(\mu) = \sqrt{1-\mu^2}\,M_n{}^m(\mu),$$

so muß wegen Gl. (46), (81a) und (82) auf Grund der Orthogonalität der Laméschen Produkte

$$g_n{}^m = \sqrt{1-\varkappa^2}\left[\frac{d\,F_n{}^m(\varrho)}{d(\sqrt{\varrho^2-1})}\right]_{\varrho=1} a_n{}^m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (83)$$

sein. Damit sind die Koeffizienten $a_n{}^m$ der Potentialfunktionen erster Art bestimmt. Entwickelt man $z = z(\xi, \eta)$ in eine Reihe nach ξ und η, so kommt die Bestimmung der $a_n{}^m$ auf einen Koeffizientenvergleich in allen mit Potenzen von ξ behafteten Gliedern in Form eines Siebverfahrens hinaus (vgl. W. Kinner [2]). Wegen der Berechnung der $a_n{}^m$ aus Gl. (46) ist nun

$$\frac{1}{V}\,w(\xi,\eta) - \sum_{n,m} a_n{}^m \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial \psi_n{}^m}{\partial z}\,dx = \frac{1}{V}\,w(\eta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (84)$$

eine Funktion von η allein. Diese Restbedingung wird nun mittels einer geeigneten Linearkombination der Abwindfunktionen zweiter Art erfüllt, die ja nur von η abhängen. Die Bedingung lautet:

$$\sum_n C_n\,w_n(\eta) + \sum_n D_n\,w_{-n}(\eta) = w(\eta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (85).$$

Diese Gleichung wird von $\eta = 0$ bis η integriert und dann — mit $P_{2a-1}(\eta)$ bzw. $P_{2\gamma}(\eta)$ multipliziert — nochmals von $\eta = -1$ bis $+1$ integriert. Das liefert unter Benutzung folgender Beziehungen:

$$\int_{-1}^{+1} P_{2r-1}(\eta)\,P_{2a-1}(\eta)\,d\eta = \begin{cases} \dfrac{2}{2(2a-1)+1} = \dfrac{2}{4a-1}, & \text{wenn } r = a \\ 0, & \text{wenn } r \neq a \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{+1} Q_{2r}(\eta)\,P_{2a-1}(\eta)\,d\eta = \frac{1}{a(2a-1) - r(2r+1)}$$

zwei unendliche Gleichungssysteme für die Koeffizienten C_n und D_n

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{r=0} C_{2r+1}\,\frac{-\sqrt{1-\varkappa^2}}{a(2a-1) - r(2r+1)} + C_{2a}\,\frac{2}{4a-1} = \frac{1}{V}\int_{-1}^{+1}\int_0^{\eta} w(\eta')\,d\eta'\,P_{2a-1}(\eta)\,d\eta \\ &\qquad a = 1, 2, \ldots \\ &D_{2\gamma+1}\,\frac{1}{4\gamma+1} + \sum_{r=1} D_{2r}\,\frac{-\sqrt{1-\varkappa^2}}{\gamma(2\gamma+1) - r(2r-1)} = \frac{1}{V}\int_{-1}^{+1}\int_0^{\eta} w(\eta')\,d\eta'\,P_{2\gamma}(\eta)\,d\eta \\ &\qquad \gamma = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (86).$$

Die Abflußbedingung. Neben der Erfüllung der Gleichungssysteme (86) müssen die Koeffizienten C_n und D_n noch der Abflußbedingung genügen, d. h. sie müssen so gewählt werden, daß die Auftriebsdichte an der Hinterkante verschwindet. Für die Potentialfunktionen erster Art ist diese Bedingung ohnehin erfüllt, da diese am ganzen Rand verschwinden. Das Verhalten der $\Phi_n{}^m$ am Rand ist gegeben durch Anwendung des Differentiationsprozesses (65) auf (41):

$$[\Phi_n{}^m]_{\substack{\varrho=1\\ \mu \approx 1}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - y^2 - \dfrac{x^2}{1-\varkappa^2}}}\,M_n{}^m(\nu) + ((\sqrt{1-\mu^2})).$$

(Der Ausdruck $((\sqrt{1-\mu^2}))$ verschwindet mit der Wurzel aus dem Randabstand.) Ich setze

$$\sum_m b_n{}^m\,M_n{}^m(\nu) = \mathfrak{M}_n(\nu) \quad \text{bzw.} \quad \sum_m b_n{}^m\,M_n{}^m(\varphi) = \mathfrak{M}_n(\varphi) \quad \ldots \ldots \quad (87).$$

Dann wird für die Potentialfunktion zweiter Art

$$[\Phi_n]_{\substack{\varrho=1\\ \mu\approx 1}} = \sum_m b_n^m \Phi_n^m|_{\varrho=1} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - y^2 - \frac{x^2}{1-\varkappa^2}}}\,\mathfrak{M}_n(\varphi) + ((\sqrt{1-\mu^2})) \quad \ldots \quad (88).$$

Die Funktionen $\mathfrak{M}_n(\varphi)$ besitzen nun ähnliche Orthogonalitätseigenschaften wie die trigonometrischen Funktionen, wie sich auf Grund der Bedingungen (73) und (74) nachweisen läßt, wenn man berücksichtigt, daß sich $\mathfrak{M}_n(\varphi)$ in der Form

$$\mathfrak{M}_n(\varphi) = (\sin\varphi)^{\varepsilon_3}\,[a_0(\cos\varphi)^{n-\varepsilon_3-1} + a_2(\cos\varphi)^{n-\varepsilon_3-3} + \ldots]$$

schreiben läßt. Es ist

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \mathfrak{M}_\gamma(\varphi)\,\mathfrak{M}_n(\varphi)\,\Delta\varphi\,d\varphi = 0, \qquad \text{wenn } n-\gamma = \pm 2, \pm 4, \ldots \quad \ldots \quad (89).$$

Die Abflußbedingung lautet nach (88):

$$\sum_{r=1}^{\infty} C_{2r}\,\mathfrak{M}_{2r}(\varphi) + \sum_{r=0}^{\infty} C_{2r+1}\mathfrak{M}_{2r+1}(\varphi) \equiv 0 \qquad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \quad \ldots \quad (90\,\text{a}),$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} D_{2r}\,\mathfrak{M}_{-2r}(\varphi) + \sum_{r=1}^{\infty} D_{2r+1}\mathfrak{M}_{-(2r+1)}(\varphi) \equiv 0 \qquad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \quad \ldots \quad (90\,\text{b}).$$

Diese Gleichungen multipliziere ich mit $\mathfrak{M}_{2a-1}(\varphi)\,\Delta\varphi$ bzw. $\mathfrak{M}_{-2\gamma}(\varphi)\,\Delta\varphi$ und integriere von $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{2}$. D. h.

$$C_{2a-1}\,I_{2a-1,\,2a-1} + \sum_{r=1} C_{2r}\,I_{2r,\,2a-1} = 0 \qquad a = 1, 2, \ldots \quad \ldots \quad (92\,\text{a}),$$

$$D_{2\gamma}\,I_{-2\gamma,\,-2\gamma} + \sum_{r=1} D_{2r+1}\,I_{-(2r+1),\,-2\gamma} = 0 \qquad \gamma = 1, 2, \ldots \quad \ldots \quad (92\,\text{b}).$$

Dabei ist

$$I_{\gamma,\,\delta} = \int_{+\frac{\pi}{2}}^{+\frac{3\pi}{2}} \mathfrak{M}_\gamma(\varphi)\,\mathfrak{M}_\delta(\varphi)\,\Delta\varphi\,d\varphi \quad \ldots \quad (93).$$

Die Systeme der unendlich vielen Gl. (86) sowie (92) liefern jetzt die Möglichkeit, die Koeffizienten der Potentialfunktionen zweiter Art C_n und D_n zu bestimmen. Mittels dieser und der bereits berechneten Koeffizienten a_n^m der Funktionen erster Art ist man dann in der Lage, die aerodynamischen Größen der vorgegebenen Tragfläche zu berechnen. An einem Beispiel wird der Rechengang erläutert.

Bemerkung. Die Rechnung des vorliegenden Teils ist durchgeführt unter der Annahme, daß die elliptische Scheibe parallel zur kleinen Hauptachse angeströmt wird. Die Länge der Hauptachse in y-Richtung war c, in x-Richtung $c\sqrt{1-\varkappa^2}$. Man kann die Rechnung ohne Schwierigkeit auf den Fall übertragen, daß die elliptische Tragfläche parallel zur großen Hauptachse angeströmt wird, indem man $\varkappa^2$ negativ annimmt, d. h. den Brennpunktabstand auf der y-Achse imaginär ansetzt. Für die elliptischen Integrale mit negativen $\varkappa^2$ gelten noch folgende Umrechnungsformeln:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1+(-\varkappa^2)\sin^2\varepsilon}} &= \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1-\frac{-\varkappa^2}{1-\varkappa^2}\sin^2\varepsilon}} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+(-\varkappa^2)\sin^2\varepsilon}\,d\varepsilon &= \sqrt{1-\varkappa^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{-\varkappa^2}{1-\varkappa^2}\sin^2\varepsilon}\,d\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (94).$$

Die Integrale sind, bis auf den Faktor vor dem Integral, dieselben wie beim reziproken Achsenverhältnis.

Die ebene elliptische Scheibe in gerader Anströmung. Der Anstellwinkel sei α_0, d. h. die elliptische Fläche ist gegeben durch

$$z = -x \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 \approx -x \cdot \alpha_0 .$$

Nach (62) ist dann

$$\frac{w(x,y)}{V} = -\alpha_0; \quad \frac{d w}{d x} = 0$$

auf der Scheibe. Nach (83) sind deshalb die Koeffizienten $a_n{}^m$ der Potentialfunktionen erster Art sämtlich Null. Die Potentialfunktionen zweiter Art müssen jetzt gemäß den Bedingungen (73; 74; 75a) bestimmt werden, was hier der Kürze halber nur für $n=3$ und $n=-3$ gezeigt werden soll.

Das Achsenverhältnis sei

$$\sqrt{1-\varkappa^2} = \frac{1}{5} \qquad \varkappa^2 = 0.96, \qquad \text{d. h. } \Lambda = \frac{(2c)^2}{F_{\mathrm{Ell}}} = \frac{4}{\pi\sqrt{1-\varkappa^2}} = 6.37 .$$

Für die vollständigen elliptischen Integrale erhalte ich dann:

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1-0.96 \sin^2 \varepsilon}} = 3.01611; \qquad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-0.96\sin^2\varepsilon}\, d\varepsilon = 1.05050 .$$

Nach (16a) ist im Fall $n=3$ und $\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$

$$E_3{}^s(\nu) = \sqrt{1-\nu^2}\,(\nu^2 - \varrho_s{}^2), \qquad s = 1;2, \qquad M_3{}^s(\nu) = \nu^2 - \varrho_s{}^2, \qquad M_3{}^s(\varepsilon) = \varkappa^2 \sin^2\varepsilon - \varrho_s{}^2 .$$

Nach (20) ist
$$\frac{1}{\varrho_s{}^2 - \varkappa^2} + \frac{1}{\varrho_s{}^2} + \frac{3}{\varrho_s{}^2 - 1} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \varrho_1{}^2 = 0.19792; \quad \varrho_2{}^2 = 0.97008 .$$

Bedingung (73) und (75a) lautet jetzt:

$$b_3{}^{(1)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (0.96 \sin^2\varepsilon - 0.19792)\, \Delta\varepsilon\, d\varepsilon + b_3{}^{(2)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (0.96\sin^2\varepsilon - 0.97008)\, \Delta\varepsilon\, d\varepsilon = 0$$

$$-\sqrt{1-\varkappa^2} = -b_3{}^{(1)} \sqrt{1-\varkappa^2}\,(0.96 - 0.19792) - b_3{}^{(2)} \sqrt{1-\varkappa^2}\,(0.96 - 0.97008) .$$

Daraus ergibt sich

$$b_3{}^{(1)} = 1.317, \qquad b_3{}^{(2)} = 0.3095 .$$

D. h.

$$\mathfrak{M}_3(\varphi) = 1.627\, \varkappa^2 \sin^2\varphi - 0.561 .$$

Für $n=3$ und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ erhält man

$$E_3{}^{-1}(\nu) = \sqrt{1-\nu^2}\, \frac{\sqrt{\varkappa^2-\nu^2}}{\varkappa} \cdot \frac{\nu}{\varkappa}, \qquad M_3{}^{-1}(\nu) = \frac{\sqrt{\varkappa^2-\nu^2}}{\varkappa} \cdot \frac{\nu}{\varkappa}, \qquad M_3{}^{-1}(\varepsilon) = \cos\varepsilon \sin\varepsilon .$$

Bedingung (75a) lautet:

$$1 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\varepsilon \cdot b_3{}^{-1} \cos\varepsilon \sin\varepsilon\, \Delta\varepsilon \frac{d\varepsilon}{\cos\varepsilon} = b_3{}^{-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varepsilon\, \Delta\varepsilon\, d\varepsilon ,$$

d. h.

$$b_3{}^{-1} = 2.654 .$$

Demnach ist

$$\mathfrak{M}_{-3}(\varphi) = -2.654 \cos\varphi \sin\varphi, \qquad \sqrt{\varkappa^2 - \nu^2} = -\varkappa \cos\varphi \;(!).$$

In analoger Weise geht die Bestimmung der weiterhin benötigten Funktionen vor sich. Mittels der Funktionen $\mathfrak{M}_n(\varphi)$ können nun die Integrale (93) berechnet werden. Diese sind entweder elliptisch oder lassen sich auf elementare zurückführen. Die Koeffizienten $I_{\gamma,\delta}$ der Gleichungssysteme (92) sind damit bekannt. Die Berechnung der rechten Seite von (86) ergibt

$$-\alpha_0 \int_{-1}^{+1} \int_0^{\eta} d\eta'\, P_{2\alpha-1}(\eta)\, d\eta = -\alpha_0 \int_{-1}^{+1} \eta \cdot P_{2\alpha-1}(\eta)\, d\eta = \begin{cases} -\dfrac{2}{3}\alpha_0 & \text{für } \alpha = 1 \\ 0 & \text{für } \alpha > 1 . \end{cases}$$

Für $\gamma = 1, 2, \ldots$ ist die rechte Seite von (86) stets Null, so daß in y unsymmetrische Potentialfunktionen nicht auftreten. In der durchgeführten Rechnung wurde die Reihe (81) der Potentialfunktionen mit $n=4$ abgebrochen, so daß die Gl. (92) und (86) für $\alpha = 1; 2$ genommen werden müssen. Das liefert

$$\left.\begin{array}{ll} 2.101\, C_1 + 1.5217\, C_2 \qquad\qquad + 0.527\, C_4 = 0 & (\alpha=1) \\ \qquad - 0.2410\, C_2 + 0.5132\, C_3 + 0.9248\, C_4 = 0 & (\alpha=2) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (92\,\mathrm{a}),$$

$$\left.\begin{array}{ll} -\frac{1}{5} C_1 + \frac{2}{3} C_2 + \frac{1}{10} C_3 \qquad = -\frac{2}{3} a_0 & (\alpha=1) \\ -\frac{1}{30} C_1 \qquad -\frac{1}{15} C_3 + \frac{2}{7} C_4 = 0 & (\alpha=2) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (86).$$

Die direkte Auflösung des Gleichungssystems führt zu

$$C_1 = 0.568\, a_0\,, \qquad C_2 = -0.7785\, a_0\,, \qquad C_3 = -0.342\, a_0\,, \qquad C_4 = -0.0135\, a_0\,.$$

Nach (77) ist jetzt der Auftrieb

$$A = 0.568\, a_0 \cdot 8 \cdot \frac{\varrho}{2} V^2 F_{\mathrm{Ell}} = 4.55\, a_0 \frac{\varrho}{2} V^2 F_{\mathrm{Ell}}\,,$$

d. h.

$$\frac{d c_a}{d a_0} = 4.55\,.$$

Für das Moment um die y-Achse ergibt sich nach (78)

$$M = -0.7785\, a_0 \cdot 0.9524 \cdot \frac{8}{3} c \sqrt{1-\varkappa^2} \frac{\varrho}{2} V^2 F_{\mathrm{Ell}}\,, \qquad M = -1.98\, a_0\, c \sqrt{1-\varkappa^2} \frac{\varrho}{2} V^2 F_{\mathrm{Ell}}\,.$$

Der Druckpunkt liegt bei $\frac{x}{c\sqrt{1-\varkappa^2}} = -0.435$, d. h. in 28.3 % max. Flügeltiefe.

Zur Berechnung des induzierten Widerstandes muß bemerkt werden, daß die Auftriebsverteilung der tragenden Linie (vgl. S. 75) bei Berücksichtigung von nur endlich vielen Reihengliedern in (81) an den Flügelenden nicht verschwindet (vgl. Bild 3), so daß für die Berechnung eine Ersatz-Auftriebsverteilung genommen werden muß. In diesem Fall eignet sich am besten hierfür die elliptische, so daß sich für den induzierten Widerstand lediglich die bekannte Formel ergibt:

$$c_{w\,i} = c_a{}^2 \frac{F_{\mathrm{Ell}}}{\pi (2c)^2}\,.$$

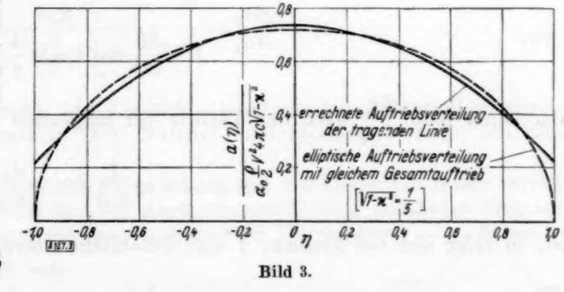


Bild 3.

Für das Achsenverhältnis

$$\sqrt{1-\varkappa^2} = \frac{1}{2}\,, \qquad \varkappa^2 = 0.75\,, \qquad \Lambda = 2.55$$

gehen die Rechnungen in derselben Weise vor sich, indem man zunächst die Größen $b_n{}^m$ aus den Bedingungen (73; 74; 75a) bestimmt. Damit hat man die Funktionen $\mathfrak{M}_n(\varphi)$ für die Berechnung der Integrale $I_{\gamma,\delta}$, womit die Koeffizienten der Gleichungssysteme (92) gegeben sind. Die Auflösung liefert

$$C_1 = 0.3741\, a_0\,, \qquad C_2 = -0.6347\, a_0\,, \qquad C_3 = -0.2347\, a_0\,, \qquad C_4 = -0.0138\, a_0\,.$$

Der Auftrieb ist dann

$$A = 2.99\, a_0 \frac{\varrho}{2} V^2 F_{\mathrm{Ell}} \quad \text{und} \quad \frac{d c_a}{d a_0} = 2.99\,.$$

Für das Kippmoment ergibt sich

$$M = -1.397\, a_0\, c \sqrt{1-\varkappa^2} \frac{\varrho}{2} V^2 F_{\mathrm{Ell}}\,.$$

Der Druckpunkt liegt bei

$$\frac{x}{c\sqrt{1-\varkappa^2}} = -0.467 \qquad \text{gleich 26,7 \% max. Flügeltiefe.}$$

Für das Achsenverhältnis

$$\sqrt{1-\varkappa^2}=2 \qquad \varkappa^2=-3 \qquad \Lambda=0.637$$

ergibt sich

$$C_1=0.124\,a_0\,, \qquad C_2=-0.5245\,a_0\,, \qquad C_3=-0.066\,a_0\,, \qquad C_4=-0.011\,a_0\,,$$

d. h.

$$\frac{d c_a}{d a_0}=0.99\,.$$

Der Druckpunkt liegt bei

$$\frac{x}{c\sqrt{1-\varkappa^2}}=-0.584 \qquad \text{gleich } 20{,}8\,\%\ \text{Tiefe.}$$

Zum Vergleich seien noch die Werte für die ebene Kreisscheibe angegeben (vgl. W. Kinner [2]):

$$\sqrt{1-\varkappa^2}=1\,, \qquad \varkappa^2=0\,, \qquad \Lambda=1.272\,, \qquad \frac{d c_a}{d a_0}=1.82\,.$$

$$\text{Druckpunkt: } \frac{x}{c}=-0.515\,, \qquad \text{d. h. in } 24{,}3\,\%\ \text{Tiefe.}$$

Die in dieser Arbeit angewandte Berechnungsmethode läßt auch einen Grenzübergang zur tragenden Linie ($\varkappa'=\sqrt{1-\varkappa^2}=0$) zu. Man erhält dann bei Berücksichtigung von zwei Reihengliedern

$$\frac{d c_a}{d a_0}=2\,\pi \qquad \text{Druckpunkt in } 28{,}8\,\%\ \text{Tiefe.}$$

Letzteres Ergebnis entspricht einer elliptischen Auftriebsverteilung über der Spannweite mit einer Druckpunktlage in $\frac{1}{4}$ Tiefe in jedem Flügelschnitt (Schwerpunkt einer homogenen Halbellipse). Entwickelt man alle Größen, die in den Gleichungssystemen auftreten, nach $\varkappa'$, so erhält man folgende Näherungsformel für kleine $\varkappa'$:

$$\frac{d c_a}{d a_0}=\frac{2\,\pi}{1+\dfrac{63}{128}\,\pi\,\varkappa'+\left(\ln\dfrac{4}{\varkappa'}-\dfrac{7}{4}\right)\varkappa'^2}\,.$$

Berechnet man $\frac{d c_a}{d a_0}$ nach der Theorie der tragenden Linie, nach der bekanntlich

$$a_{\text{eff}}=a_0+c_a\,\frac{1}{\pi\,\Lambda}\,, \qquad \frac{d c_a}{d a_0}=\frac{2\,\pi\,\Lambda}{\Lambda+2}$$

ist, so zeigt sich bei kleinem Λ eine erhebliche Abweichung gegenüber den nach der Theorie der tragenden Fläche berechneten Werten, vgl. hierzu Bild 4.

Andererseits ist die Übereinstimmung mit den von Weinig [10] errechneten Werten gut.

In Bild 5 ist die Abhängigkeit der Druckpunktlage vom Seitenverhältnis dargestellt.

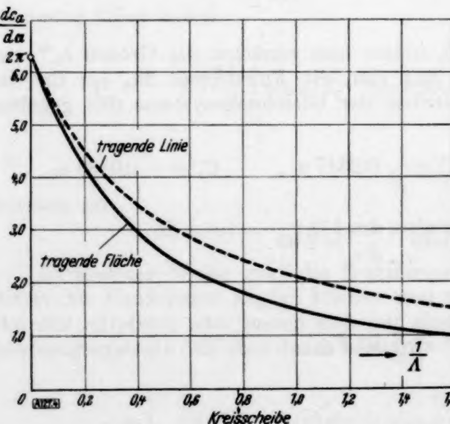


Bild 4.

Bild 5.

Der schiebende elliptische Tragflügel. Unter denselben Voraussetzungen, die bei gerader Anströmung der Tragfläche gemacht wurden, läßt sich auch die schiebende elliptische Tragfläche behandeln. Der sogenannte Schiebewinkel sei β, dessen Definition sich aus Bild 6 ergibt.

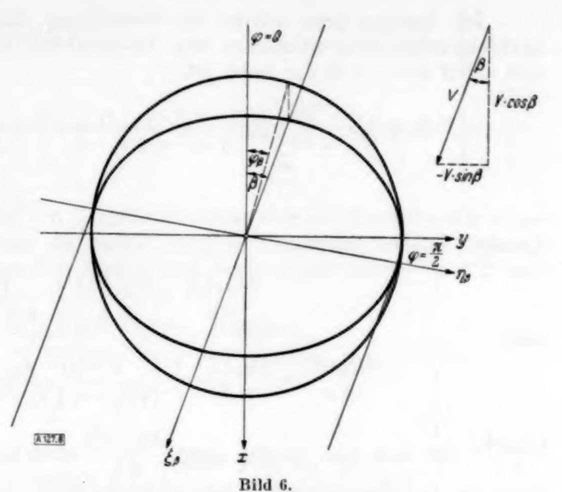


Bild 6.

Die Stromlinien sind jetzt Geraden in der Ebene $z=0$, die durch

$$\left.\begin{aligned} y &= -(x-x_R)\operatorname{tg}\beta + y_R \\ &= -x\operatorname{tg}\beta + \text{const} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (95)$$

definiert sind. Aus Gl. (1)

$$(V\cos\beta + u)\frac{\partial w}{\partial x} + (-V\sin\beta + v)\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

wird unter den vereinfachenden Annahmen

$$V\cos\beta\frac{\partial w}{\partial x} - V\sin\beta\frac{\partial w}{\partial y} = V^2\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96).$$

Wegen (95) ist aber

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}\operatorname{tg}\beta, \qquad \text{d. h.} \quad \frac{dw}{dx}\cos\beta = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\beta - \frac{\partial w}{\partial y}\sin\beta.$$

Gl. (96) läßt sich dann in der Form schreiben:

$$\frac{dw}{dx}\cos\beta = V\frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad (y = -x\operatorname{tg}\beta + \text{const}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96\text{a}).$$

Den Abwind erhalte ich daraus durch Integration längs einer Stromlinie, die wieder als Gerade parallel zur Anströmungsrichtung angenommen wird.

$$\frac{w}{V} = \frac{1}{\cos\beta}\int_{-\infty}^{x}\frac{\partial\psi}{\partial z}\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97).$$

Die Potentialfunktion ψ wird wieder als Linearkombination der Potentialfunktionen $\psi_n{}^m$, Φ_n, Φ_{-n} in der Form (81) angenommen. Für Auftrieb und Momente erhalte ich also dieselben Formeln.

Für die Berechnung der Abwindfunktionen führe ich in der xy-Ebene ein neues schiefwinkliges Koordinatensystem ein, das durch den zur Anströmungsrichtung parallelen Ellipsendurchmesser — ξ_β-Achse — und den dazugehörigen konjugierten Durchmesser — η_β-Achse — gegeben ist. Setze ich

$$\operatorname{tg}\varphi_\beta = \sqrt{1-\varkappa^2}\operatorname{tg}\beta, \quad \text{d. h.} \quad \sin\varphi_\beta = \frac{\sqrt{1-\varkappa^2}\sin\beta}{\Delta\beta}; \quad \cos\varphi_\beta = \frac{\cos\beta}{\Delta\beta} \quad . \quad . \quad (98),$$

so sind die eben erwähnten Durchmesser gegeben durch

$$y = -\frac{\operatorname{tg}\varphi_\beta}{\sqrt{1-\varkappa^2}}\,x \quad \text{bzw.} \quad y = -\frac{\operatorname{tg}\left(\varphi_\beta + \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{1-\varkappa^2}}\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99).$$

Auf der Scheibe, d. h. für $\varrho = 1$, ist nach Gl. (6) und (17)

$$\xi = \frac{x}{c\sqrt{1-\varkappa^2}} = -\frac{\sqrt{\mu^2-\varkappa^2}}{\sqrt{1-\varkappa^2}}\cos\varphi; \qquad \eta = \frac{y}{c} = \mu\sin\varphi.$$

In analoger Weise setze ich

$$\xi_\beta = -\frac{\sqrt{\mu^2-\varkappa^2}}{\sqrt{1-\varkappa^2}}\cos(\varphi-\varphi_\beta); \qquad \eta_\beta = \mu\sin(\varphi-\varphi_\beta),$$

d. h.

$$\xi_\beta = \frac{\cos\beta}{\Delta\beta}\,\xi - \frac{\sqrt{1-\varkappa^2}\sin\beta}{\Delta\beta}\,\eta, \qquad \eta_\beta = \frac{\sqrt{1-\varkappa^2}\sin\beta}{\Delta\beta}\,\xi + \frac{\cos\beta}{\Delta\beta}\,\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100).$$

Ich benutze jetzt wieder die Darstellung (32) der Potentialfunktionen ψ_n^m. Bei den nachfolgenden Differentiationen bzw. Integrationen längs einer Stromlinie ist stets zu beachten, daß dabei $y = -x \operatorname{tg} \beta + \text{const}$ ist.

$$\psi_n^m(x,y,z) = \frac{1}{2\pi i}\int Q_n\left[\frac{\sqrt{\wp(t)-e_2}}{\sqrt{e_2-e_1}\sqrt{e_2-e_3}}\cdot\frac{x}{c} + \frac{\sqrt{\wp(t)-e_3}}{\sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_3-e_2}}\cdot\frac{y}{c} + \frac{\sqrt{\wp(t)-e_1}}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}}\cdot\frac{z}{c}\right] E_n^m(t)\,dt \quad . \quad (32).$$

Es ist

$$\frac{\partial Q_n(X)}{\partial z} = \frac{dQ_n(X)}{dX}\frac{1}{c}\frac{\sqrt{\wp(t)-e_1}}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}}$$

und

$$\frac{dQ_n(X)}{dx} = \frac{dQ_n(X)}{dX}\frac{1}{c}\left[\frac{\sqrt{\wp(t)-e_2}}{\sqrt{e_2-e_1}\sqrt{e_2-e_3}} - \frac{\sqrt{\wp(t)-e_3}}{\sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_3-e_2}}\operatorname{tg}\beta\right].$$

$\frac{\partial Q_n(X)}{\partial z}$ läßt sich also wieder durch $\frac{dQ_n(X)}{dx}$ ausdrücken; setze ich das Resultat in (97) ein und führe die Integration über x aus, so ergibt sich

$$\frac{w_n^m}{V} = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\cos\beta}\int Q_n(X)\frac{\sqrt{\wp(t)-e_1}}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}}\frac{1}{\frac{\sqrt{\wp(t)-e_2}}{\sqrt{e_2-e_1}\sqrt{e_2-e_3}} - \frac{\sqrt{\wp(t)-e_3}}{\sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_3-e_2}}\operatorname{tg}\beta} E_n^m(t)\,dt \quad (101).$$

Unter Benutzung von Gl. (51) und (52) wird wieder $Q_n(X)$ ersetzt durch

$$Q_n(X) = \frac{1}{2}\int_{v+w-\omega_1}^{v+w+\omega_1}\frac{P_n(Y(s))}{X-Y(s)}\frac{dY}{ds}\,ds\,.$$

Der Integrand hat Pole an der Stelle $t = s$, da dort $X(t) - Y(s) = 0$ ist, und bei $t = t_\beta$, wo

$$\frac{\sqrt{\wp(t_\beta)-e_2}}{\sqrt{e_2-e_1}\sqrt{e_2-e_3}} - \frac{\sqrt{\wp(t_\beta)-e_3}}{\sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_3-e_2}}\operatorname{tg}\beta = 0$$

ist, d. h.

$$\sqrt{\wp(t_\beta)-e_2} = i\sqrt{e_2-e_3}\sin\varphi_\beta\,; \qquad \sqrt{\wp(t_\beta)-e_3} = -\sqrt{e_2-e_3}\cos\varphi_\beta\,.$$

Der Nenner verhält sich an dieser Stelle wie

$$(t-t_\beta)\sqrt{\wp(t_\beta)-e_1}\left|\frac{-\cos\varphi_\beta}{i\sqrt{e_1-e_2}} - \frac{i\sin\varphi_\beta}{\sqrt{e_1-e_3}}\operatorname{tg}\beta\right| + \cdots.$$

Das Residuum an der Stelle $t = t_\beta$ ist also

$$2\pi i\,Q_n(X(t_\beta))\frac{1}{i\cos\varphi_\beta + i\operatorname{tg}\varphi_\beta\sin\varphi_\beta}E_n^m(t_\beta) = 2\pi i\frac{\cos\beta}{\Delta\beta}E_n^m(-\varkappa\cos\varphi_\beta)\,Q_n(\eta_\beta) \qquad (102)$$

unter Berücksichtigung der Tatsache, daß nach Gl. (100)

$$X(t_\beta) = \sin\varphi_\beta\frac{x}{c\sqrt{1-\varkappa^2}} + \cos\varphi_\beta\frac{y}{c} = \eta_\beta$$

ist und nach (33)

$$E_n^m(t_\beta) = i\,E_n^m(\lambda)_{\lambda=-\varkappa\cos\varphi_\beta}\,.$$

Für das Residuum an der Stelle $t = s$ gilt wieder das bereits im Fall der geraden Anströmung Gesagte (vgl. S. 71). In diesem Fall erhält man dafür

$$2\pi i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}P_n(\xi\cos\varepsilon + \eta\sin\varepsilon)\frac{i\,\Delta\varepsilon}{\cos\varepsilon - \sqrt{1-\varkappa^2}\operatorname{tg}\beta\sin\varepsilon}\,i\,M_n^m(\varepsilon)\,d\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad (103).$$

Ersetze ich noch $\sqrt{1-\varkappa^2}\operatorname{tg}\beta$ durch $\operatorname{tg}\varphi_\beta$ und führe mittels Gl. (100) die Koordinaten ξ_β und η_β ein, so wird mit den Werten (102) und (103) aus Gl. (101)

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{V} w_n{}^m(\xi_\beta, \eta_\beta) &= \frac{1}{\Delta\beta} E_n{}^m(-\varkappa\cos\varphi_\beta) Q_n(\eta_\beta) - \\ &- \frac{1}{\Delta\beta}\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n[\xi_\beta\cos(\varepsilon+\varphi_\beta)+\eta_\beta\sin(\varepsilon+\varphi_\beta)]\frac{M_n{}^m(\varepsilon)}{\cos(\varepsilon+\varphi_\beta)}\Delta\varepsilon\, d\varepsilon\end{aligned}\right\} \quad (104).$$

Bei den Gliedern von P_n, die Potenzen von ξ_β enthalten, hebt sich der Nenner $\cos(\varepsilon+\varphi_\beta)$ im Integral fort, und man erhält vollständige elliptische Integrale erster und zweiter Gattung. Für die Berechnung der übrigen erweitere ich Zähler und Nenner mit $\cos(\varepsilon-\varphi_\beta)\Delta^2\beta$ und erhalte dann mit

$$\cos(\varepsilon+\varphi_\beta)\cos(\varepsilon-\varphi_\beta)\Delta^2\beta = \cos^2\beta - \Delta^2\beta\sin^2\varepsilon$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{V} w_n{}^m(\xi_\beta, \eta_\beta) &= \frac{1}{\Delta\beta} E_n{}^m(-\varkappa\cos\varphi_\beta) Q_n(\eta_\beta) - \\ &- \frac{1}{2}\Delta\beta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n[\xi_\beta\cos(\varepsilon+\varphi_\beta)+\eta_\beta\sin(\varepsilon+\varphi_\beta)]\frac{\cos(\varepsilon-\varphi_\beta)M_n{}^m(\varepsilon)}{\cos^2\beta-\Delta^2\beta\sin^2\varepsilon}\Delta\varepsilon\, d\varepsilon\end{aligned}\right\} \quad (104\,\mathrm{a}).$$

Die auftretenden Integrale lassen sich zurückführen auf vollständige elliptische Integrale erster und zweiter Gattung und ein Integral der Form

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varepsilon}{\cos^2\beta-\Delta^2\beta\sin^2\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{\Delta\varepsilon},$$

das sich als vollständiges elliptisches Integral dritter Gattung auf unvollständige erster und zweiter Gattung zurückführen läßt [11].

$$\frac{(1-\varkappa^2)\sin\beta\,\Delta\beta}{\cos\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varepsilon}{\cos^2\beta-\Delta^2\beta\sin^2\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{\Delta\varepsilon} = E(\beta)F\left(\frac{\pi}{2}\right) - E\left(\frac{\pi}{2}\right)F(\beta) - \Delta\beta\,\mathrm{tg}\,\beta\, F\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (105).$$

Für die Potentialfunktion $\psi_1{}^1$ soll jetzt die Berechnung der Abwindfunktion als Beispiel durchgeführt werden.

$$E_1{}^1(\lambda) = \sqrt{1-\lambda^2}, \qquad M_1{}^1(\varepsilon) = 1,$$

$$P_1(Y) = Y, \qquad Q_1(X) = \frac{X}{2}\ln\frac{X+1}{X-1} - 1,$$

$$E_1{}^1(-\varkappa\cos\varphi_\beta) = \sqrt{1-\varkappa^2\cos^2\varphi_\beta} = \frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{\Delta\beta}.$$

Dann ist nach (104a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} w_1{}^1(\xi_\beta, \eta_\beta) &= \frac{1}{\Delta\beta}\frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{\Delta\beta} Q_1(\eta_\beta) - \\ &- \frac{1}{2}\Delta\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\xi_\beta\cos(\varepsilon+\varphi_\beta)+\eta_\beta\sin(\varepsilon+\varphi_\beta)]\frac{\cos(\varepsilon-\varphi_\beta)\Delta\varepsilon}{\cos^2\beta-\Delta^2\beta\sin^2\varepsilon}d\varepsilon \\ &= \frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{\Delta^2\beta} Q_1(\eta_\beta) - \\ &- \frac{1}{2}\xi_\beta\cdot\frac{1}{\Delta\beta}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\Delta\varepsilon\, d\varepsilon - \frac{1}{2}\eta_\beta\cdot\Delta\beta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi_\beta\cos\varphi_\beta+\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{\cos^2\beta-\Delta^2\beta\sin^2\varepsilon}\Delta\varepsilon\, d\varepsilon.\end{aligned}$$

Die Auswertung der Integrale liefert

$$\frac{1}{V} w_1{}^1(\xi_\beta, \eta_\beta) = \frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{\Delta^2 \beta} Q_1(\eta_\beta) - \frac{\xi_\beta}{\Delta \beta} E\left(\frac{\pi}{2}\right) - \eta_\beta \frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{\Delta^2 \beta}\left[E(\beta) F\left(\frac{\pi}{2}\right) - E\left(\frac{\pi}{2}\right) F(\beta)\right].$$

Die Abwindfunktionen der Potentialfunktionen zweiter Art. Nach (68) ist $\Phi_n = \sum_m b_n{}^m \Phi_n{}^m$, wobei nach (65)

$$\Phi_n{}^m = \frac{1}{c^{n-1}} \frac{d}{dc}[c^n \psi_n{}^m(x, y, z, c)]$$

ist. In derselben Weise berechnet sich die Abwindfunktion $w_n(\xi_\beta, \eta_\beta)$ aus $w_n{}^m(\xi_\beta, \eta_\beta)$, d. h.

$$\frac{1}{V} w_n = -\frac{1}{\Delta \beta} \sum_m b_n{}^m E_n{}^m(-\varkappa \cos \varphi_\beta) \frac{d Q_{n-1}(\eta_\beta)}{d \eta_\beta} + \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta \beta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d P_{n-1}(Y)}{d Y} \frac{\mathfrak{M}_n(\varepsilon)}{\cos(\varepsilon + \varphi_\beta)} \Delta \varepsilon \, d\varepsilon \quad (106).$$

Auf der Scheibe ist $\left.\frac{\partial \Phi_n}{\partial z}\right|_{\varrho=1} \equiv 0$, d. h. auf einer Stromlinie ($\eta_\beta = \text{const}$) ist die Abwindfunktion konstant. w_n ist also eine Funktion von η_β allein. Ich kann demnach in $\frac{d}{dY} P_{n-1}(Y)$ $\xi_\beta = 0$ setzen. Zu untersuchen bleibt noch der Summand

$$\eta_\beta{}^{n-2p}[\sin(\varepsilon + \varphi_\beta)]^{n-2p} \quad \text{aus} \quad Y^{n-2p}.$$

Setze ich wieder $\tau = \frac{n}{2}$ bzw. $\frac{n-1}{2}$, so wird

$$\begin{aligned}[\sin(\varepsilon + \varphi_\beta)]^{n-2p} &= [\sin(\varepsilon + \varphi_\beta)]^{n-2\tau} \cdot [\sin(\varepsilon + \varphi_\beta)]^{2\tau - 2p} \\ &= [\sin(\varepsilon + \varphi_\beta)]^{n-2\tau} \cdot (1 + \text{Summe von cos-Gliedern}).\end{aligned}$$

Aus der Summe kann ich den Faktor $\cos(\varepsilon + \varphi_\beta)$ einmal herausziehen, so daß er sich gegen den Nenner kürzt. Die neu entstehende Summe, multipliziert mit $[\sin(\varepsilon + \varphi_\beta)]^{n-2\tau}$, liefert aber nur Glieder, die entweder in ε ungerade oder der Bedingung (73) bzw. (74) genügen, und demnach alle verschwinden. Einen von Null verschiedenen Beitrag liefert nur $[\sin(\varepsilon + \varphi_\beta)]^{n-2\tau} \cdot 1$, das aber vom Exponenten p nicht mehr abhängt. Ich kann also alle $\eta_\beta{}^{n-2p}$ vor dem Integral gemäß $\frac{d}{dY} P_{n-1}(Y)$ zu $\frac{d}{d\eta_\beta} P_{n-1}(\eta_\beta)$ zusammenfassen, da das Integral für jedes p dasselbe ist, d. h.

$$\left.\begin{aligned}\frac{w_n(\eta_\beta)}{V} = &-\frac{1}{\Delta \beta} \sum_m b_n{}^m E_n{}^m(-\varkappa \cos \varphi_\beta) \frac{d Q_{n-1}(\eta_\beta)}{d \eta_\beta} + \\ &+ \frac{d P_{n-1}(\eta_\beta)}{d \eta_\beta} \frac{1}{2} \Delta \beta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [\sin \varepsilon \cos \varphi_\beta + \cos \varepsilon \sin \varphi_\beta]^{n-2\tau} \frac{\cos \varepsilon \cos \varphi_\beta + \sin \varepsilon \sin \varphi_\beta}{\cos^2 \beta - \Delta^2 \beta \sin^2 \varepsilon} \mathfrak{M}_n(\varepsilon) \Delta \varepsilon \, d\varepsilon\end{aligned}\right\} (107).$$

Die Abwindfunktionen bei der schräg angeströmten Tragfläche haben demnach folgende Form:

$$\frac{1}{V} w_n(\eta_\beta) = k_n(\beta) \frac{d Q_{n-1}(\eta_\beta)}{d \eta_\beta} + i_n(\beta) \frac{d P_{n-1}(\eta_\beta)}{d \eta_\beta} \quad \ldots\ldots\ldots (107\text{a}),$$

$$\frac{1}{V} w_{-n}(\eta_\beta) = l_n(\beta) \frac{d Q_{n-1}(\eta_\beta)}{d \eta_\beta} + j_n(\beta) \frac{d P_{n-1}(\eta_\beta)}{d \eta_\beta} \quad \ldots\ldots\ldots (107\text{b}).$$

Die zweite Grundaufgabe im Fall des schiebenden Tragflügels. Man geht vor wie im Fall des gerade angeströmten Tragflügels, indem man

$$\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\nu^2} \cos \beta \frac{d w(x, y)}{d x} = \frac{V}{c} \sum_n \sum_m g_n{}^m E_n{}^m(\mu) E_n{}^m(\nu) \quad \ldots (108)$$

setzt, wobei

$$\frac{1}{V} w(x, y) = \cos \beta \frac{d z(x, y)}{d x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (108\text{a})$$

und $y = -x \operatorname{tg} \beta + \text{const}$ ist. ψ sei wieder durch

$$\psi = \sum_n \sum_m a_n^m \psi_n^m + \sum_n C_n \Phi_n + \sum_n D_n \Phi_{-n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (109)$$

gegeben. Gl. (96a) liefert dann

$$g_n^m = \sqrt{1-\varkappa^2}\left[\frac{d F_n^m(\varrho)}{d(\sqrt{\varrho^2-1})}\right]_{\varrho=1} a_n^m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (110),$$

womit die Koeffizienten der Potentialfunktionen erster Art bestimmt sind. Für die Bestimmung der Koeffizienten der Funktionen zweiter Art nehme ich Bedingung (97) in folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_n C_n \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} \frac{dx}{\cos\beta} + \sum_n D_n \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial \Phi_{-n}}{\partial z} \frac{dx}{\cos\beta} \\ &\qquad = \frac{1}{V} w(x,y) - \sum_n \sum_m a_n^m \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial \psi_n^m}{\partial z} \frac{dx}{\cos\beta} = \frac{1}{V} w(\eta_\beta) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (111).$$

Die rechte Seite ist eine Funktion von η_β allein wegen der Bestimmung der a_n^m aus (96a). Die Restbedingung lautet dann also:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_n C_n k_n(\beta) \frac{d Q_{n-1}(\eta_\beta)}{d\eta_\beta} + \sum_n C_n i_n(\beta) \frac{d P_{n-1}(\eta_\beta)}{d\eta_\beta} + \\ &+ \sum_n D_n l_n(\beta) \frac{d Q_{n-1}(\eta_\beta)}{d\eta_\beta} + \sum_n D_n j_n(\beta) \frac{d P_{n-1}(\eta_\beta)}{d\eta_\beta} = \frac{1}{V} w(\eta_\beta) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (112).$$

Ich integriere diese Gleichung von $\eta_\beta = 0$ bis η_β und dann — mit $P_{2\alpha-1}(\eta_\beta)$ bzw. $P_{2\gamma}(\eta_\beta)$ multipliziert — nochmals von $\eta_\beta = -1$ bis $+1$. Auf Grund der Orthogonalitätseigenschaften der Kugelfunktionen ergibt sich dann

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{r=0} \left(C_{2r+1} k_{2r+1}(\beta) + D_{2r+1} l_{2r+1}(\beta)\right) \frac{1}{\alpha(2\alpha-1) - r(2r+1)} + \\ &+ \left(C_{2\alpha} i_{2\alpha}(\beta) + D_{2\alpha} j_{2\alpha}(\beta)\right) \frac{2}{4\alpha-1} = \frac{1}{V} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{\eta_\beta} w(\eta'_\beta)\, d\eta'_\beta P_{2\alpha-1}(\eta_\beta)\, d\eta_\beta; \; \alpha = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \quad (113\text{a}).$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{r=1} \left(C_{2r} k_{2r}(\beta) + D_{2r} l_{2r}(\beta)\right) \frac{1}{\gamma(2\gamma-1) - r(2r-1)} \\ &+ \left(C_{2\gamma+1} i_{2\gamma+1}(\beta) + D_{2\gamma+1} j_{2\gamma+1}(\beta)\right) \frac{1}{4\gamma+1} = \frac{1}{V} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{\eta_\beta} w(\eta'_\beta)\, d\eta'_\beta P_{2\gamma}(\eta_\beta)\, d\eta_\beta; \; \gamma = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \quad (113\text{b}).$$

Die Abflußbedingung. Für die Formulierung der Abflußbedingung sei folgende Bemerkung eingeschoben. Die Abwindfunktionen (107) beim schiebenden Tragflügel haben die Eigenschaft, bei $\eta_\beta = \pm 1$ wie $Q_{n-1}(\eta_\beta)$ bzw. $\frac{d Q_{n-1}(\eta_\beta)}{d\eta_\beta}$ unendlich zu werden. $\eta_\beta = \pm 1$ sind aber die Randpunkte der elliptischen Scheibe, in denen Parallelen zur Anströmungsrichtung die Ellipse berühren (vgl. Bild 6). Man wird demnach anzunehmen haben, daß die sogenannten ‚Wirbelzöpfe' in diesen Punkten parallel zur Anströmungsrichtung von der Scheibe abgehen. Ich verlange deshalb, daß zwischen den Punkten $\eta_\beta = \pm 1$ keine Umströmung der Hinterkante stattfindet. D. h. (vgl. S. 76):

$$\sum_n C_n \mathfrak{M}_n(\varphi) + \sum_n D_n \mathfrak{M}_{-n}(\varphi) = 0 \qquad \frac{\pi}{2} + \varphi_\beta \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} + \varphi_\beta .$$

Diese Gleichung multipliziere ich mit

$$\mathfrak{M}_{2\alpha-1}(\varphi)\, \Delta\varphi \text{ bzw. } \mathfrak{M}_{-2\gamma}(\varphi)\, \Delta\varphi$$

und integriere von $\frac{\pi}{2} + \varphi_\beta$ bis $\frac{3\pi}{2} + \psi_\beta$. Das liefert folgende Gleichungssysteme:

$$\left.\begin{aligned} C_{2\alpha-1}\, I^{(\beta)}_{2\alpha-1,\,2\alpha-1} + \sum_{r=1} C_{2r}\, I^{(\beta)}_{2r,\,2\alpha-1} + \sum_{r=1} D_{2r}\, I^{(\beta)}_{-2r,\,2\alpha-1} = 0; \quad \alpha = 1, 2, .. \\ D_{2\gamma}\, I^{(\beta)}_{-2\gamma,\,-2\gamma} + \sum_{r=1} C_{2r-1}\, I^{(\beta)}_{2r-1,\,-2\gamma} + \sum_{r=1} D_{2r+1}\, I^{(\beta)}_{-(2r+1),\,-2\gamma} = 0; \; \gamma = 1, 2, .. \end{aligned}\right\} \quad (114).$$

Dabei ist

$$I^{(\beta)}_{\gamma,\,\delta} = \int\limits_{\frac{\pi}{2}+\varphi_\beta}^{\frac{3\pi}{2}+\varphi_\beta} \mathfrak{M}_\gamma(\varphi)\, \mathfrak{M}_\delta(\varphi)\, \Delta\varphi\, d\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (114\text{a}).$$

Die Gl. (113) und (114) liefern jetzt die Möglichkeit, die Koeffizienten C_n und D_n zu bestimmen. Mit den bereits oben bestimmten $a_n{}^m$ ist man dann in der Lage, die aerodynamischen Größen einer schräg angeblasenen elliptischen Tragfläche zu berechnen. Zu den Gleichungssystemen ist noch zu bemerken, daß sie eine Kopplung der Systeme (86) und (92) für den Fall der geraden Anströmung bilden. Man erkennt dies leicht an der Ähnlichkeit der entsprechenden Gleichungskoeffizienten, womit man eine erste einfache Rechenkontrolle hat.

Die schräg angeblasene ebene elliptische Tragfläche. Die Rechnungen sind durchgeführt worden für das Achsenverhältnis $\sqrt{1-\varkappa^2} = \frac{1}{5}$ (vgl. S. 78 ff.) und die Schiebewinkel

$$\beta = 15^\circ \qquad \text{und} \qquad \beta = 30^\circ.$$

Benötigt werden hierfür wieder nur die Potentialfunktionen zweiter Art gemäß (108) und (110). Zwecks Vereinfachung der sehr umfangreichen Rechnung werden nur die Funktionen bis zum Grad $n = 3$ genommen, d. h.

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_{-2}, \Phi_{-3} \qquad (\Phi_{-1} \text{ existiert nicht}).$$

Für die 5 unbekannten Koeffizienten dieser Potentialfunktionen brauche ich also 5 Gleichungen. 2 nehme ich aus der Bedingung $\frac{1}{V} w(\eta_\beta) = -\cos\beta \text{ tg } \alpha_0$ auf der Scheibe, Gl. (113a) für $\alpha = 1$ und (113b) für $\gamma = 1$. Für die drei weiteren Gleichungen nehme ich die Abflußbedingung (Gl. (114) mit $\alpha = 1{,}2$ und $\gamma = 1$). In die Berechnung der schiebenden Fläche gehen dieselben $\mathfrak{M}_n(\varphi)$ ein, die schon im Fall der geraden Anströmung bestimmt wurden. Die Integrale $I^{(\beta)}_{\gamma,\delta}$ erhalten jetzt nur die Grenzen $\frac{\pi}{2} + \varphi_\beta$ und $\frac{3\pi}{2} + \varphi_\beta$. Die Integrale $I_{\gamma,\gamma}$ bleiben dabei wegen der Periodizität des Integranden unverändert. Die für die Bestimmung der Koeffizienten $k_n(\beta)$, $i_n(\beta)$ usw. notwendigen Werte der unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung wurden den Legendreschen Tafeln [12] entnommen. Für $\beta = 15^\circ$ ergibt sich dann

$$C_1 = 0.5204\, a_0$$
$$C_2 = -0.7194\, a_0 \qquad D_2 = 0.0144\, a_0$$
$$C_3 = -0.3343\, a_0 \qquad D_3 = -0.0065\, a_0.$$

D. h.

$$A = 4.16\, a_0 \frac{\varrho}{2} V^2 F_{\text{Ell}}$$

$$M = -1.83\, a_0\, c \sqrt{1-\varkappa^2} \frac{\varrho}{2} V^2 F_{\text{Ell}}$$

$$L = 0.0384\, a_0\, c \frac{\varrho}{2} V^2 F_{\text{Ell}}.$$

Für $\beta = 30^\circ$ ist

$$C_1 = 0.407\, a_0$$
$$C_2 = -0.562\, a_0 \qquad D_2 = 0.0277\, a_0$$
$$C_3 = -0.265\, a_0 \qquad D_3 = -0.0124\, a_0.$$

D. h.

$$A = 3.26\, a_0 \frac{\varrho}{2} V^2 F_{\text{Ell}}$$

$$M = -1.43\, a_0\, c \sqrt{1-\varkappa^2} \frac{\varrho}{2} V^2 F_{\text{Ell}}$$

$$L = 0.074\, a_0\, c \frac{\varrho}{2} V^2 F_{\text{Ell}}.$$

Das neu hinzutretende Moment L ist nach den obigen Berechnungen positiv, was damit gleichbedeutend ist, daß die voraneilende Flügelhälfte größeren Auftrieb erhält. Nachfolgend sind noch die Koordinaten der Druckpunkte angegeben:

$$\beta = 15^\circ: \quad \frac{x}{c\sqrt{1-\varkappa^2}} = -0.440; \quad \frac{y}{c} = 0.00925 \qquad (\varphi = 6^\circ\ 02')$$

$$\beta = 30^\circ: \quad \frac{x}{c\sqrt{1-\varkappa^2}} = -0.439; \quad \frac{y}{c} = 0.0227 \qquad (\varphi = 13^\circ\ 51').$$

Zum Vergleich seien an dieser Stelle noch einmal die Werte angegeben, die man erhält bei $\beta = 0^\circ$, wenn die Reihe der Potentialfunktionen mit $n = 3$ abgebrochen wird. In Klammern ist die Änderung in Prozenten gegenüber den mit 4 Reihengliedern berechneten Größen angegeben, woraus sich Schlüsse bezüglich der Konvergenz der Rechnung ziehen lassen.

$$C_1 = \ \ 0.563\, a_0 \qquad (-0.9\,\%)$$

$$C_2 = -0.776\, a_0 \qquad (-0.2\,\%) \qquad\qquad D_2 = 0$$

$$C_3 = -0.365\, a_0 \qquad (+7.0\,\%) \qquad\qquad D_3 = 0\,.$$

D. h.

$$A = \ \ 4.50\, a_0 \frac{\varrho}{2} V^2 F_{\mathrm{Ell}}$$

$$M = -1.98\, a_0\, c\sqrt{1-\varkappa^2}\, \frac{\varrho}{2}\, V^2 F_{\mathrm{Ell}}.$$

$$\text{Druckpunkt: } \frac{x}{c\sqrt{1-\varkappa^2}} = -0.438 \qquad (+0.7\,\%)\,.$$

Eine Zusammenstellung der Ergebnisse zeigen die Bilder 7 und 8.

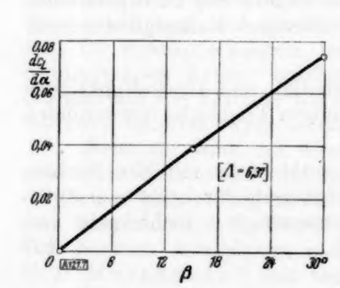


Bild 7 (links). $\frac{dc_L}{d\alpha}$ in Abhängigkeit vom Schiebewinkel β für das Seitenverhältnis $\Lambda = 6.37$.

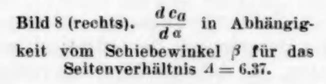
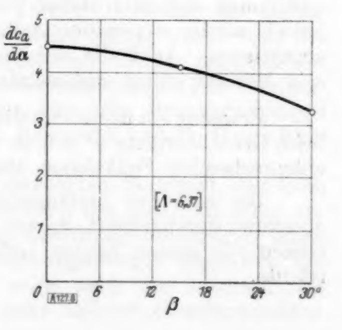


Bild 8 (rechts). $\frac{dc_a}{d\alpha}$ in Abhängigkeit vom Schiebewinkel β für das Seitenverhältnis $\Lambda = 6.37$.



Für große Λ läßt sich wieder eine Näherungsformel für das Rollmoment in Abhängigkeit vom Schiebewinkel β und dem Achsenverhältnis $\varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2}$ angeben.

$$\frac{d c_L}{d \alpha_0} = \frac{15}{128}\pi^2 \cdot \varkappa' \cdot \sin 2\beta\, \frac{\ln\frac{4}{\varkappa'} - \frac{3}{2} - \frac{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\beta}}{1 + \frac{\pi}{\cos\beta}\frac{243}{128}\varkappa'} \quad \ldots \ldots (115).$$

Die Formel zeigt, daß das Moment beim Grenzübergang zur tragenden Linie ($\varkappa' = 0$) verschwindet. Macht man jedoch das Moment mit der halben Flügeltiefe an Stelle der halben Spannweite dimensionslos, so daß der Faktor $\varkappa'$ in (115) wegfällt, so wird der Momentenkoeffizient beim Grenzübergang logarithmisch unendlich. Im Grenzfall nimmt der Auftrieb mit $\cos^2\beta$ ab, was sich dadurch erklären läßt, daß die Anströmgeschwindigkeit in x-Richtung $V\cos\beta$ ist.

Die von S. Hoerner [13] veröffentlichten Messungen an schiebenden Flächen mit verschiedenen Umrißformen stimmen sehr gut mit den hier berechneten Werten überein. Es erscheint daher die Annahme berechtigt zu sein, daß das Rollmoment neben dem Schiebewinkel im wesentlichen von der Flügelstreckung und nicht von der Tiefenverteilung im einzelnen abhängt.

Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit ist die elliptische Tragfläche in gerader und schräger Anströmung auf potentialtheoretischer Grundlage behandelt worden. Entsprechend der Theorie erster Näherung, die die Grundlage der Rechnung bildet, müssen die bekannten Forderungen über die Gestalt der Fläche und deren Anstellwinkel erfüllt sein. Als weitere Bedingung kommt noch hinzu, daß die Neigung der Fläche in Richtung der Stromlinien eine stetig differenzierbare Funktion der Flächenpunkte sein muß. Ist dies in einem vorgegebenen Beispiel nicht der Fall (z. B. bei Querruderausschlag oder V-Form der Fläche — Letzteres ist bei der schiebenden Fläche von Bedeutung —), so muß man sich behelfen, indem man die Knicke durch entsprechende Abrundungen ersetzt. Im allgemeinen Fall wird für die Berechnung einer vorgegebenen elliptischen Fläche eine Reihe von unendlich vielen Potentialfunktionen benötigt, deren Koeffizienten sich aus linearen unendlichen Gleichungssystemen bestimmen. Um zu einem zahlenmäßigen Ergebnis zu gelangen, bricht man diese Reihe gemäß der gewünschten Genauigkeit mit einem bestimmten Glied ab. Auf die Integralgrößen Auftrieb und Auftriebsmomente hat dies einen praktisch zu vernachlässigenden Einfluß. Über den induzierten Widerstand läßt sich keine unmittelbare Aussage gewinnen, da man hierfür sämtliche Koeffizienten der unendlich vielen Potentialfunktionen brauchte. Die Auftriebsverteilung geht nämlich sonst an den Flügelenden rechnerisch nicht gegen Null oder der Abwind wird dort unendlich, was dadurch bedingt ist, daß z. B. die Auftriebsverteilung der tragenden Linie hier nach Kugelfunktionen (vgl. (80)) entwickelt wird, die an den Flügelenden nicht zu Null werden wie die sonst verwendeten trigonometrischen Funktionen. Bei der schiebenden Fläche, die man nicht ohne weiteres durch eine tragende Linie ersetzen kann, müßte man zunächst den sogenannten Flächenwiderstand (vgl. W. Kinner [2])

$$W_F = -\iint (p_u - p_{ob}) \frac{w}{V}\, dx\, dy$$

bestimmen und dann davon die Saugkraft an der Vorderkante subtrahieren. Dabei ist man jedoch wieder wegen der endlichen Anzahl der berechneten Koeffizienten auf Extrapolationen angewiesen. Auch die sich ergebende Druckverteilung ist bei wenigen Reihengliedern nur sehr bedingt gültig, insbesondere in Nähe der Flügelenden.

Erwähnt sei noch, daß die in dieser Arbeit berechneten Potential- und Abwindfunktionen beim Grenzübergang $\varkappa^2 \to 0$ in die von Kinner bei der kreisförmigen Tragfläche verwendeten entsprechenden Funktionen übergehen.

Die zum Teil umfangreichen Zahlenrechnungen wurden größtenteils mit der Rechenmaschine durchgeführt, da bei der Berechnung der elliptischen Integrale für höheres n Differenzen von großen Zahlen auftraten, so daß die Rechenschiebergenauigkeit nicht mehr ausreichte. 127

Schrifttumsverzeichnis.

[1] L. Prandtl: Beitrag zur Theorie der tragenden Fläche. Z. angew. Math. Mech. Bd. 16 (1936), S. 360.
[2] W. Kinner: Die kreisförmige Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage. Ing.-Arch. Bd. 8 (1937), S. 47.
[3] E. Heine: Hdb. d. Kugelfunkt. Bd. I. Berlin 1878, S. 347 ff.
[4] Whittaker-Watson: Modern Analysis. Cambrige 1920, S. 549 ff.
[5] E. Heine: Hdb. d. Kugelfunkt. Bd. I, S. 359.
[6] E. Heine: Hdb. d. Kugelfunkt. Bd. I, S. 360/363.
[7] E. W. Hobson: Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Cambridge 1931, S. 476.
[8] E. Heine: Hdb. d. Kugelfunkt. Bd. I, S. 369 u. S. 379.
[9] E. Heine: Hdb. d. Kugelfunkt. Bd. II. Berlin 1881, S. 172.
[10] F. Weinig: Beitrag zur Theorie des Tragflügels endlicher, insbesondere kleiner Spannweite. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), S. 405.
[11] D. Schlömilch: Comp. d. höh. Analysis. Bd. II. Braunschweig 1865, S. 336 bis 339.
[12] A. M. Legendre: Tafeln der ellipt. Normalintegrale. Stuttgart 1931.
[13] S. Hoerner: Kräfte und Momente schrägangeströmter Tragflügel. Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939), S. 178.

Elastizitätstheorie zweiter Ordnung mit Anwendungen.

Von *Maurice A. Biot* in New York.

Einleitung. In der klassischen Elastizitätstheorie geht man von der Voraussetzung aus, daß die Beanspruchungen, Formänderungen und Drehungen sehr klein sind. Sie werden durch Glieder erster Ordnung dargestellt, während Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt werden. Im folgenden wird eine Theorie entwickelt, die alle Glieder zweiter Ordnung enthält, jedoch nicht die explizite Formulierung der Beziehung zwischen Beanspruchung und Formänderung erfordert.

Die Resultate wurden mit Hilfe der Variationsrechnung abgeleitet, jedoch ist das ganz unwesentlich. Der Erfolg dieser Methode ist darauf zurückzuführen, daß für die Komponenten der Formänderung neue Ausdrücke (Abs. 1) gewählt wurden. Dadurch ergibt diese Methode Glieder, die sich in der klassischen Theorie nicht vorfinden, die man jedoch mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen eines kleinen Elementes auch erhalten kann. Die Komponenten der Formänderung stehen in linearer Beziehung zu den tatsächlichen Längenänderungen.

Damit wird ein Ausdruck für die Dehnungsenergie aufgestellt (Abs. 2). Es ergibt sich in natürlicher Weise die Dualität der Darstellung des Beanspruchungszustandes. Zugleich werden Beziehungen abgeleitet zwischen den Komponenten der Beanspruchung, bezogen auf die Fläche vor der Formänderung, sowie denen, bezogen auf die Fläche nach der Formänderung.

Im Abschnitt 3 sind die Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet. Diese enthalten alle Glieder zweiter Ordnung und beziehen sich auf beide Systeme der Beanspruchungen. Auch hier wurde die Variationsrechnung angewandt.

Im letzten Abschnitt wird die lineare Theorie für kleine Formänderungen und kleine Änderungen der Beanspruchungen für einen Körper unter anfänglicher Beanspruchung behandelt. Daselbst wird ein Ausdruck für die potentielle Energie mit allen Gliedern zweiter Ordnung hergeleitet, sowie die linearen Gleichungen für das Gleichgewicht.

Diese Theorie ist vor allem anwendbar bei Behandlung der Fortleitung von Schwingungen in einem vorbeanspruchten Körper und bei Untersuchung des elastischen labilen Gleichgewichtes und der Knickung. Auch hier müssen wir streng unterscheiden zwischen kleinen Änderungen der Beanspruchung, bezogen auf die Flächen vor oder nach der Formänderung. Es ergab sich, daß die Elastizitätsmoduli des Hookeschen Gesetzes für die zusätzlichen Beanspruchungen und Formänderungen eine symmetrische Matrix sind, wenn die Beanspruchungen auf die Flächen vor der Formänderung bezogen sind. Dieses ist nicht der Fall für Beanspruchungen, bezogen auf die Flächen nach der Formänderung. Für den vorbeanspruchten Körper ergeben sich Gleichgewichtsbedingungen, die, für Beanspruchungen bezogen auf die Flächen vor der Formänderung, schon von C. Biezeno und H. Hencky[1]) auf ganz anderem Wege erhalten worden sind.

Nahe verwandt mit dieser Aufgabe ist das Problem der elastischen Stabilität, das auch schon verschiedentlich untersucht worden ist. R. V. Southwell[2]) hat den Fall einer anfänglichen gleichmäßigen Vorbeanspruchung behandelt mit den Koordinatenrichtungen längs der Hauptachsen. E. Trefftz[3]) hat Gleichungen aus der Dehnungsenergie abgeleitet, die den genauen Ausdrücken nicht ganz entsprechen. Erwähnt seien auch die Arbeiten von F. D. Murnaghan[4]) und von B. R. Seth[5]), die jedoch von ganz anderen Gesichtspunkten ausgehen[6]).

1. Die Dehnung. Nach der Formänderung werden die Koordinaten eines materiellen Punktes x^i zu ξ^i. Die drei Funktionen ξ^i stellen ein stetiges Verzerrungsfeld dar. In der unendlich nahen Umgebung eines Punktes x^i wird die Verschiebung dx^i zu $d\xi^i$:

$$d\xi^i = \sum^{j} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} dx^j \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.1)$$

---

1) C. B. Biezeno and H. Hencky: On the general theory of elastic stability. Proceedings of the Royal Academy Amsterdam. 31 (1928), p. 569, u. 32 (1929), p. 444.

2) R. V. Southwell: On the theory of elastic stability. Phil. Trans. Roy. Soc. 1913, ser. A vol. 213, pp. 187—244.

3) E. Trefftz: Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichts. Z. angew. Math. Mech. Bd. 13 (1933), S. 160 bis 165.

4) F. D. Murnaghan: Finite Deformations of an elastic solid. American Journal of Mathematics, 1937.

5) B. R. Seth: Finite Strain in elastic problems. Phil. Trans. Roy. Soc. A 234 (1935), pp. 231.

6) Siehe auch M. A. Biot: Theory of Elasticity with large displacements and rotations. Proceedings of the fifth International Congress of Applied Mechanics 1938, p. 117—122. — Théorie de l'Elasticité du second ordre. Ann. Soc. Scient. de Bruxelles LIX, ser. 1, p. 104, 1939. — Non Linear theory of Elasticity and the linearized case for a body under initial stress. Phil. Mag. Sec. 7, Vol. XXVII, p. 468, April 1939.

Zugleich besteht die Beziehung

$$d\xi^i = \sum^j \left(\delta^i_j + \frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right) d x^j \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1.2)$$

mit

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}.$$

Setzen wir

$$e^i_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right), \qquad \omega^i_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right) \quad \ldots \ldots (1.3),$$

wird

$$d\xi^i = \sum^j (\delta^i_j + e^i_j + \omega^i_j)\, d x^j \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1.4)$$

mit den Beziehungen

$$e^i_j = e^j_i, \qquad \omega^i_j = -\omega^j_i, \qquad \omega^i_i = 0.$$

Das Quadrat eines Längenelementes nach der Formänderung ist

$$d s^2 = \sum^i (d\xi^i)^2, \qquad d s^2 = \sum^{\mu\nu} (\delta_{\mu\nu} + 2 g_{\mu\nu})\, d x^\mu d x^\nu \quad \ldots \ldots (1.5),$$

wobei

$$\delta_{\mu\nu} = \sum^i \delta^i_\mu \delta^i_\nu = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum^i e^i_\mu e^i_\nu + \frac{1}{2}\sum^i (\omega^i_\mu e^i_\nu + \omega^i_\nu e^i_\mu) + \frac{1}{2}\sum^i \omega^i_\mu \omega^i_\nu \quad \ldots (1.6).$$

Anstatt e^ν_μ haben wir $e_{\mu\nu}$ gesetzt.

Der Tensor $g_{\mu\nu}$ ist allgemein als Verschiebungstensor bekannt. Es ist jedoch besser, einen anderen endlichen Deformationstensor so zu bestimmen, daß er in linearer Beziehung zur Längenänderung ds, anstatt zum Quadrate ds^2 der Längenänderung steht.

Zu diesem Zwecke wird die folgende lineare Transformation mit symmetrischen Koeffizienten eingeführt:

$$(d\xi^i)' = \sum^j (\delta^i_j + \varepsilon^i_j)\, d x^j \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1.7),$$

wobei

$$\varepsilon^i_j = \varepsilon^j_i.$$

Nach Einführung dieser Transformation wird das Quadrat des Längenelementes die Form annehmen

$$d\sigma^2 = \sum^{\mu\nu} (\delta_{\mu\nu} + 2\gamma_{\mu\nu})\, d x^\mu d x^\nu \quad \ldots \ldots \ldots (1.8),$$

wobei

$$\gamma_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum \varepsilon^i_\mu \varepsilon^i_\nu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1.9)$$

wird. Wir setzen $\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon^\nu_\mu$.

Die Transformation (1.7) läßt bekanntlich keine Winkeländerungen zu[7]) und kann daher als Definition einer reinen Dehnung verwandt werden, wobei die endlichen Dehnungen durch die Komponenten ε^i_j dargestellt werden. Mit der Identität

$$d s^2 = d\sigma^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1.10)$$

wird die Transformation (1.4) und (1.7) den gleichen Zustand einer homogenen Dehnung darstellen. Das bedeutet zugleich, daß

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1.11)$$

wird.

So erhält man sechs Gleichungen, in denen die sechs Dehnungskomponenten ε^i_j durch die Koeffizienten e^i_j und ω^i_j der allgemeineren Transformation (1.4) dargestellt werden. Die

[7]) A. E. H. Love: Mathematical theory of Elasticity, pp. 65, Cambridge 1906.

sechs Größen ε^i_j, die durch diese Gleichungen dargestellt sind, können als Komponenten endlicher Dehnung in der allgemeinen Transformation aufgefaßt werden.

Sie sind irrationale Funktionen der Größen e^j_i und ω^j_i: Jedoch können sie leicht bestimmt werden, wenn wir uns mit einer Approximation zweiten Grades begnügen und somit e^j_i und ω^j_i als Größen erster Ordnung ansehen.

Wir sehen aus Gl. (1.11), daß e^j_i und ε^j_i sich nur um Größen zweiter Ordnung unterscheiden. Wir können daher mit einem Fehler dritter Ordnung schreiben

$$\sum^i e^i_\mu e^i_\nu = \sum^i \varepsilon^i_\mu \varepsilon^i_\nu \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1.12).$$

Dieses in Gl. (1.11) eingesetzt, ergibt

$$\varepsilon_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum^i (\omega^i_\mu e^i_\nu + \omega^i_\nu e^i_\mu) + \frac{1}{2}\sum^i \omega^i_\mu \omega^i_\nu \quad \ldots \ldots \quad (1.13).$$

2. Die Dehnungsenergie. Wir berechnen jetzt die Dehnungsenergie einer reinen, homogenen Dehnung

$$\xi^i = \sum^j (\delta^i_j + \varepsilon^i_j) x^j \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2.1),$$

wobei $\varepsilon^i_j = \varepsilon^j_i$.

Mit der Annahme, daß die Beanspruchung σ^i_j und Dehnung ε^i_j Größen erster Ordnung sind, wird ein Ausdruck für die Dehnungsenergie hergeleitet, der bis zur dritten Ordnung als richtig angenommen ist. Dieses entspricht einer Näherung zweiter Ordnung der Gleichgewichtsbedingungen.

Das entsprechende homogene Spannungsfeld σ^i_j hat die gleichen Koordinatenachsen wie die Dehnung. Es ist auch

$$\sigma^i_j = \sigma^j_i.$$

Die auf die Flächeneinheit bezogene Oberflächenkraft, die an der Oberfläche S eines Volumenelementes V des Körpers angreift, ist

$$F_i = \sum^j \sigma^j_i a_j \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2.2),$$

wobei die Größen a_j die Richtungskosinusse der äußeren Flächennormalen der Oberfläche S sind.

Ändern wir die Dehnungskomponenten um die kleinen Größen $\delta\varepsilon^i_j$, so ändern sich die Koordinaten des Volumens um

$$\delta\xi^i = \sum^j \delta\varepsilon^i_j x^j \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2.3).$$

Die von der Oberflächenkraft geleistete Arbeit, die dieser Dehnungsänderung entspricht, ist gleich der Dehnungsenergie δW_V des Volumens

$$\delta W_V = \iint_S \sum^i F_i \,\delta\xi^i \, dS \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2.4).$$

Nach (2.2) können wir schreiben

$$\delta W_V = \iint_S \sum^{ij} \sigma^j_i \,\delta\xi^i a_j \, dS.$$

Nach der Greenschen Formel kann dieser Ausdruck auch als ein Volumenintegral geschrieben werden:

$$\delta W_V = \iiint_V \sum^j \frac{\partial}{\partial \xi^j} \sum^i \sigma^j_i \,\delta\xi^i \, dV.$$

Da wir es mit einem homogenen Feld zu tun haben, sind die σ^j_i alle konstant, deshalb

$$\delta W_V = \iiint_V \sum^{ij} \sigma^j_i \frac{\partial}{\partial \xi^j} d\xi^i \, dV \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2.5).$$

Wenn man das Gleichungssystem (2.1) nach den drei Größen x^i als Funktionen von ξ^i auflöst, kann man die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial \xi^j}\delta\xi^i$ leicht erhalten. Wir lassen die Größen zweiter Ordnung fort und erhalten

$$D x^i = (1+\varepsilon)\,\xi^i - \sum^{j} \varepsilon^i_j \xi^j,$$

wo

$$\varepsilon = \sum^{i} \varepsilon^i_i \quad \text{und} \quad D = \left| \delta^i_j + \varepsilon^i_j \right|$$

die Determinante der Transformation (2.1) ist. Diese Näherung ist gerechtfertigt, denn sie hat keinen Einfluß auf die Glieder der ersten drei Ordnungen im Ausdruck für δW.

Nach Einsetzen von

$$D\,\delta\,\xi^i = (1+\varepsilon) \sum^{j} \xi^j\,\delta\,\varepsilon^i_j - \sum^{\varkappa j} \varepsilon^\varkappa_j\,\xi^j\,\delta\,\varepsilon^i_\varkappa$$

oder

$$D\,\delta\,\xi^i = \sum^{j} \left[(1+\varepsilon)\,\delta\,\varepsilon^i_j - \sum^{\varkappa} \varepsilon^\varkappa_j\,\delta\,\varepsilon^i_\varkappa \right] \xi^j$$

in den Ausdruck (2.3), wird

$$\frac{\partial}{\partial\,\xi^j}\,\delta\,\xi^i = \frac{(1+\varepsilon)}{D}\,\delta\,\varepsilon^i_j - \frac{1}{D} \sum^{\varkappa} \varepsilon^\varkappa_j\,\delta\,\varepsilon^i_\varkappa$$

und

$$\delta W_V = \iiint\limits_V \left| \sum^{ij} (1+\varepsilon)\,\sigma^j_i\,\delta\,\varepsilon^i_j - \sum^{ij\varkappa} \varepsilon^\varkappa_j\,\sigma^j_i\,\delta\,\varepsilon^i_\varkappa \right| \frac{d\,V}{D} \quad \ldots\ldots \quad (2.6).$$

Nennen wir V' den Volumeninhalt vor der Dehnung, so können wir schreiben

$$\frac{d\,V}{D} = d\,V'.$$

Daher wird

$$\delta W_V = \iiint\limits_{V'} \sum^{ij} \left[(1+\varepsilon)\,\sigma^j_i - \sum^{\varkappa} \varepsilon^j_\varkappa\,\sigma^\varkappa_i \right] \delta\,\varepsilon^i_j\;d\,V' \quad \ldots\ldots \quad (2.7).$$

So wird denn die Änderung der Dehnungsenergie bezogen auf das ursprüngliche Volumen

$$\delta W = \sum^{ij} \left[(1+\varepsilon)\,\sigma^j_i - \sum^{\varkappa} \varepsilon^j_\varkappa\,\sigma^\varkappa_i \right] \delta\,\varepsilon^i_j \quad \ldots\ldots \quad (2.8).$$

Der unsymmetrische Tensor

$$(1+\varepsilon)\,\sigma^j_i - \sum^{\varkappa} e^j_\varkappa\,\sigma^\varkappa_i$$

kann daher als die Oberflächenkraft nach der Dehnung aufgefaßt werden, die an den Seitenflächen eines ursprünglich kubischen Einheitselementes angreift.

Jedoch tritt nur der symmetrische Teil dieses Tensors in dem Ausdruck von δW auf, weil $\delta\,\varepsilon^i_j = \delta\,\varepsilon^j_i$.

Deshalb erhalten wir, wenn wir für den symmetrischen Teil den folgenden Ausdruck benutzen

$$\tau^j_i = (1+\varepsilon)\,\sigma^j_i - \frac{1}{2} \sum^{k} \left(\varepsilon^j_\varkappa\,\sigma^\varkappa_i + \varepsilon^i_\varkappa\,\sigma^\varkappa_j \right) \quad \ldots\ldots \quad (2.9)$$

den Ausdruck:

$$\delta W = \sum^{ij} \tau^j_i\,\delta\,\varepsilon^i_j \quad \ldots\ldots \quad (2.10).$$

Der Tensor τ^j_i kann als die Beanspruchung, bezogen auf die Fläche vor der Dehnung, und der Tensor σ^j_i als die Beanspruchung, bezogen auf die Fläche nach der Dehnung aufgefaßt werden. Gl. (2.9) gibt die Beziehungen an, die zwischen den beiden Systemen von Spannungskomponenten bestehen.

Das Bestehen einer Funktion der Dehnungsenergie setzt voraus, daß δW ein exaktes Differential ist.

Deshalb müssen die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen

$$\tau^j_i = \tau^j_i(\ldots\varepsilon^s_r\ldots) \quad \text{oder} \quad \sigma^j_i = \sigma^j_i(\ldots\varepsilon^s_r\ldots)$$

den folgenden achtzehn Bedingungen genügen:

$$\frac{\partial\,\tau^j_i}{\partial\,\varepsilon^s_r} = \frac{\partial\,\tau^s_r}{\partial\,\varepsilon^j_i} \quad \ldots\ldots \quad (2.11)$$

oder

$$(1+\varepsilon)\frac{\partial \sigma_i^j}{\partial \varepsilon_r^s}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_r^s}\sum^k\left(\varepsilon_k^j\sigma_i^k+\varepsilon_k^i\sigma_j^k\right)=(1+\varepsilon)\frac{\partial \sigma_r^s}{\partial \varepsilon_i^j}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_i^j}\sum^k\left(\varepsilon_k^s\sigma_r^k+\varepsilon_k^r\sigma_s^k\right).$$

Hieraus ist klar ersichtlich, daß die Beziehungen für das Spannungssystem τ nicht dieselben sind wie für das System σ.

3. Die Gleichgewichtsbedingungen. Die Änderung der Dehnungsenergie, bezogen auf den Volumeninhalt V für den Fall der nichthomogenen Dehnung ist

$$\delta W=\iiint_V\sum^{\mu\nu}\tau_\nu^\mu\,\delta\varepsilon_\mu^\nu\,dV \quad \ldots \quad (3.1).$$

Die Größen ε_j^i müssen alle Glieder erster und zweiter Ordnung enthalten, so, wie sie vorher berechnet worden sind:

$$\varepsilon_\mu^\nu=\varepsilon_{\mu\nu}=e_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\sum^i\left(\omega_\mu^i e_\nu^i+\omega_\nu^i e_\mu^i\right)+\frac{1}{2}\sum^i\omega_\mu^i\omega_\nu^i.$$

Da in unserem Falle nur cartesische Tensoren benutzt sind, können für jeden Tensor A_μ^ν auch die Bezeichnungen $A^{\nu\mu}$ oder $A_{\nu\mu}$ benutzt werden.

Durch Variation ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\delta\varepsilon_{\mu\nu}=\delta e_{\mu\nu}&+\frac{1}{2}\sum^i\left(\omega_\mu^i\,\delta e_\nu^i+\omega_\nu^i\,\delta e_\mu^i\right)+\frac{1}{2}\sum^i\left(e_\nu^i\,\delta\omega_\mu^i+e_\mu^i\,\delta\omega_\nu^i\right)\\&+\frac{1}{2}\sum^i\left(\omega_\mu^i\,\delta\omega_\nu^i+\omega_\nu^i\,\delta\omega_\mu^i\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3.2).$$

Zudem kann unter Benutzung der Beziehungen (1.3) und durch richtigen Gebrauch der Summationszeichen gezeigt werden, daß

$$\sum^{\mu\nu}\tau^{\mu\nu}\delta\varepsilon_{\mu\nu}=\sum^{i\mu\nu}\left(\tau^{\nu i}\,\delta\frac{\partial u^i}{\partial x^\nu}+\tau^{\mu\nu}\omega_\mu^i\,\delta\frac{\partial u^i}{\partial x^\nu}+\frac{1}{2}\tau^{\mu\nu}e_\mu^i\,\delta\frac{\partial u^i}{\partial x^\nu}-\frac{1}{2}\tau^{\mu i}e_\mu^\nu\,\delta\frac{\partial u^i}{\partial x^\nu}\right)$$

ist.

Wir benutzen die Eigenschaft, daß $\delta\frac{\partial u^i}{\partial x^\nu}=\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta u^i$ und integrieren partiell. Dann erhalten wir aus dem Integral (3.1) die Beziehung

$$\delta W=\iint_S f^i\,\delta u_i\,dS-\iiint_V A^i\,\delta u_i\,dV \quad \ldots \quad (3.3),$$

wo

$$f^i=\sum^\nu\tau^{\nu i}a_\nu+\sum^{\mu\nu}\left[\tau^{\mu\nu}\omega_\mu^i+\frac{1}{2}\tau^{\mu\nu}e_\mu^i-\frac{1}{2}\tau^{\mu i}e_\mu^\nu\right]a_\nu \quad \ldots \quad (3.4)$$

und worin a_ν die Richtungskosinusse der äußeren Normalen der Oberfläche von V sind.

$$A^i=\sum^\nu\frac{\partial\tau^{\nu i}}{\partial x^\nu}+\sum^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\tau^{\mu\nu}\omega_\mu^i+\frac{1}{2}\tau^{\mu\nu}e_\mu^i-\frac{1}{2}\tau^{\mu i}e_\mu^\nu\right) \quad \ldots \quad (3.5).$$

Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte ist gleich $-\delta W$ und die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ist gleich:

$$\delta W_e=\iint_S F^i\,\delta u^i\,dS+\iiint_V X^i\varrho\,\delta u^i\,dV \quad \ldots \quad (3.6),$$

wobei F^i die Oberflächenkraft ist, bezogen auf die ursprüngliche Fläche, und X^i die Massenkraft darstellt. Wenn wir bedenken, daß die gesamte virtuelle Arbeit für alle Werte von δu^i verschwindet, so erhalten wir

$$\delta W_e-\delta W=0$$

und die Gleichgewichtsbedingungen nehmen die Form

$$\sum^\nu\frac{\partial\tau^{\nu i}}{\partial x^\nu}+\sum^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\tau^{\mu\nu}\omega_\mu^i+\frac{1}{2}\tau^{\mu\nu}e_\mu^i-\frac{1}{2}\tau^{\mu i}e_\mu^\nu\right)+X\varrho=0 \quad \ldots \quad (3.7)$$

an, und die Randbedingungen werden durch

$$F^i = \sum^{\nu} \tau^{\nu i} a_\nu + \sum^{\mu\nu} \left(\tau^{\mu\nu} \omega^i_\mu + \frac{1}{2} \tau^{\mu\nu} e^i_\mu - \frac{1}{2} \tau^{\mu i} e^\nu_\mu\right) a_\nu \quad \ldots \ldots \quad (3.8)$$

dargestellt.

Diese Gleichungen können auch durch die Spannungen $\sigma^{\mu\nu}$ dargestellt werden. Da wir uns auf Glieder erster und zweiter Ordnung beschränkt haben, können wir für ε^ν_μ die Größe e^ν_μ einsetzen.

$$\tau^{\nu i} = (1+e)\,\sigma^{\nu i} - \frac{1}{2} \sum^{\mu} \left(e^\nu_\mu \sigma^{\mu i} + e^i_\mu \sigma^{\mu\nu}\right) \quad \ldots \ldots \quad (3.9).$$

Diese Ausdrücke werden in die Gl. (3.7) und (3.8) eingesetzt. Es genügt, wenn wir für unsere Näherung $\tau^{\nu i}$ nur in die Glieder erster Ordnung einsetzen und in den übrigen Gliedern an Stelle von $\tau^{\nu i}$ die Größen $\sigma^{\nu i}$ nehmen.

Auf diese Weise erhalten wir

$$\sum^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (1+e)\,\sigma^{\nu i} - \sum^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\sigma^{\mu\nu} \omega^i_\mu - \sigma^{\mu i} e^\nu_\mu\right) + X^i \varrho = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3.10)$$

und die Randbedingungen

$$F^i = \sum^{\nu} (1+e)\,\sigma^{\nu i} a_\nu + \sum^{\mu\nu} \left(\sigma^{\mu\nu} \omega^i_\mu - \sigma^{\mu i} e^\nu_\mu\right) a_\nu \quad \ldots \ldots \quad (3.11).$$

4. Die lineare Elastizitätstheorie eines vorbeanspruchten Körpers. Als Anfangszustand nehmen wir an, daß eine Vorbeanspruchung $S^{\mu\nu}$ im Körper existiert, der die Koordinaten x^i entsprechen. Die Gleichgewichtsbedingung dieses Anfangsspannungsfeldes lautet:

$$\sum^{\nu} \frac{\partial S^{\nu i}}{\partial x^\nu} + \varrho X^i = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4.1),$$

worin ϱX^i die anfängliche Einheitsmassenkraft bedeutet.

Nehmen wir jetzt an, daß der Körper einer kleinen Dehnung unterzogen wird. Für diese Dehnungen bauen wir eine lineare Elastizitätstheorie auf.

Die Koordinaten x^i eines materiellen Punktes im Körper werden durch die Dehnung zu $x^i + u^i$. Die Koordinatenänderungen u^i und der dazugehörige Tensor e^i_j, ω^i_j werden als Näherungen erster Ordnung angesehen. Die Dehnungskomponenten ε^i_j sind wie in Gl. (1.13) definiert. Für die Komponenten der Spannung nach der Dehnung können nun entweder die tatsächliche Spannung $\sigma^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + s^{\mu\nu}$, oder die Spannung $\tau^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}$, bezogen auf die Fläche vor der Dehnung gewählt werden. Die Spannungsänderungen $t^{\mu\nu}$ und $s^{\mu\nu}$ sind auch als klein und als Näherungen erster Ordnung anzusehen.

Die einer linearen Theorie entsprechende Dehnungsenergie muß nun lineare und quadratische Glieder enthalten. Wir behandeln somit die Änderung der Dehnungsenergie, δW, die einer Änderung der Dehnung von der Größenordnung $\delta \varepsilon_{\mu\nu}$ entspricht. Man erkennt, daß es möglich ist, einen Ausdruck für δW zu erhalten, der alle Glieder erster und zweiter Ordnung enthält, wenn man $\sigma^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + s^{\mu\nu}$ in die Gl. (2.10) einsetzt. Wenn man alle Glieder dritter Ordnung vernachlässigt, erhält man

$$\delta W = \sum^{\mu\nu} t^{\mu\nu} \delta \varepsilon_{\mu\nu} + \sum^{\mu\nu} S^{\mu s} \delta \varepsilon_{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \quad (4.2),$$

worin

$$t^{\mu\nu} = s^{\mu\nu} + \varepsilon S^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sum^{\varkappa} \left(\varepsilon^\mu_\varkappa S^{\nu\varkappa} + \varepsilon^\nu_\varkappa S^{\mu\varkappa}\right) \quad \ldots \ldots \quad (4.3)$$

ist.

Die obigen Gleichungen drücken die Beziehungen zwischen den beiden Systemen der Spannungskomponenten $s^{\mu\nu}$ und $t^{\mu\nu}$ aus: Die Spannungs-Dehnungsbeziehungen sind als linear angenommen. Die Form dieser Beziehungen hängt natürlich von der Wahl des Spannungssystemes ab, d. h. ob wir das System $s^{\mu\nu}$ oder $t^{\mu\nu}$ benutzen.

$$t^{\mu\nu} = \sum^{\varkappa r} C^{\mu\nu}_{\varkappa r} e_{\varkappa r} \quad \ldots \ldots \quad (4.4)$$

oder

$$s^{\mu\nu} = \sum^{\varkappa r} B^{\mu\nu}_{\varkappa r} \varepsilon_{\varkappa r} \quad \ldots \ldots \quad (4.5).$$

Die Summierung $\sum^{\varkappa r}$ wird über alle sechs Kombinationen von $\varkappa$ und r ausgedehnt. Damit δW ein totales Differential sein kann, müssen gewisse Beziehungen zwischen den Koeffizienten B und C bestehen. Es bestehen die Gleichungen

$$\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial \varepsilon_{\varkappa r}} = \frac{\partial t^{\varkappa r}}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4.6),$$

somit

$$C^{\mu\nu}_{\varkappa r} = C^{\varkappa r}_{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4.7),$$

$$\left.\begin{aligned} & B^{\mu\nu}_{\varkappa r} + S^{\mu\nu}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_{\varkappa r}} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\varkappa r}}\sum^{\alpha}\left(S^{\alpha\mu}\varepsilon^{\nu}_{\alpha} + S^{\alpha\nu}\varepsilon^{\mu}_{\alpha}\right) \\ & = B^{\varkappa r}_{\mu\nu} + S^{\varkappa r}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}}\sum^{\alpha}\left(S^{\alpha\varkappa}\varepsilon^{r}_{\alpha} + S^{\alpha r}\varepsilon^{\varkappa}_{\alpha}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4.8).$$

Die C-Koeffizienten stellen eine symmetrische Matrix dar, während dasselbe für die B-Koeffizienten im allgemeinen nicht zutrifft.

Der Ausdruck $\delta W' = \sum^{\mu\nu} t^{\mu\nu}\,\delta\,\varepsilon_{\mu\nu}$ stellt das Differential einer quadratischen Form W' in der Veränderlichen $\varepsilon_{\mu\nu}$ dar. Wir haben $\frac{\partial W'}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}} = t^{\mu\nu}$ und von den Eigenschaften quadratischer Formen

$$2\,W' = \sum^{\mu\nu}\frac{\partial W'}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}}\varepsilon_{\mu\nu} = \sum^{\mu\nu} t^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4.9).$$

So erhalten wir einen Ausdruck für die potentielle Energie

$$W = \frac{1}{2}\sum^{\mu\nu} t^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} + \sum^{\mu\nu} S^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4.10),$$

der alle Glieder erster und zweiter Ordnung enthält.

Weiterhin kann an Stelle von $\varepsilon_{\mu\nu}$ auch $e_{\mu\nu}$ eingesetzt werden, zum mindesten in der ersten Gruppe der Glieder $\sum^{\mu\nu} t^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}$, denn W wird dadurch nur in der dritten Ordnung beeinflußt. Somit

$$W = \frac{1}{2}\sum^{\mu\nu} t^{\mu\nu} e_{\mu\nu} + \sum^{\mu\nu} S^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4.11),$$

wobei die Beziehung zwischen Spannung und Dehnung durch

$$t^{\mu\nu} = \sum^{kr} C^{\mu\nu}_{kr}\, e_{kr} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4.12)$$

gegeben ist.

Zugleich können auch die Spannungen $s^{\mu\nu}$ aus (4.3) eingeführt werden und man erhält

$$t^{\mu\nu} = s^{\mu\nu} + e\,S^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\sum^{k}\left(e^{\mu}_{k} S^{\nu k} + e^{\nu}_{k} S^{\mu k}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4.13).$$

Nach Einsetzen dieser Ausdrücke in W erhalten wir

$$W = \frac{1}{2}\sum^{\mu\nu} s^{\mu\nu} e_{\mu\nu} + \sum^{\mu\nu} S^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum^{\mu\nu} e_{\mu\nu}\left[S^{\mu\nu} e - \frac{1}{2}\sum^{k}\left(e^{\mu}_{k} S^{\nu k} + e^{\nu}_{k} S^{\mu k}\right)\right] \quad (4.14)$$

mit den Spannungs-Dehnungsbeziehungen

$$s^{\mu\nu} = \sum^{kr} B^{\mu\nu}_{kr}\, e_{kr} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4.15).$$

Es muß nun klar im Auge behalten werden, daß der Wert $\varepsilon_{\mu\nu}$, der hier benutzt wird, durch die Gl. (1.13) dargestellt ist:

$$\varepsilon_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum^{i}\left(\omega^{i}_{\mu} e^{i}_{\nu} + \omega^{i}_{\nu} e^{i}_{\mu}\right) + \frac{1}{2}\sum^{i}\omega^{i}_{\mu}\,\omega^{i}_{\nu}.$$

Wenn wir nun diese Ausdrücke der Dehnungsenergie W benutzen und die Variationsmethode der virtuellen Arbeit anwenden, wie es im nichtlinearen Falle geschehen ist, sowie die Gleichgewichtsbedingung (4.1) des Vorspannungsfeldes $S^{\mu\nu}$ berücksichtigen, so erhalten wir die folgenden Gleichungen für das Gleichgewicht

$$\sum^{\nu} \frac{\partial t^{\nu i}}{\partial x^{\nu}} + \sum^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(S^{\mu\nu} \omega^{i}_{\mu} + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} e^{i}_{\mu} - \frac{1}{2} S^{\mu i} e^{\nu}_{\mu} \right) + \varrho \, \Delta X^{i} = 0 \quad . \; . \; (4.16),$$

worin ΔX^i die Änderung erster Ordnung der Massenkraft ist.

Wir erhalten für die Randbedingungen

$$\Delta F^{i} = \sum^{\nu} t^{\nu i} a_{\nu} + \sum^{\mu\nu} \left[S^{\mu\nu} \omega^{i}_{\mu} + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} e^{i}_{\mu} - \frac{1}{2} S^{\mu i} e^{\nu}_{\mu} \right] a_{\nu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4.17),$$

worin ΔF^i die Änderung der Oberflächenkraft, bezogen auf die Einheit der ursprünglichen Oberfläche, und a_ν der Kosinus der Richtungswinkel der nach außen gerichteten Normalen bedeuten.

Wir haben somit die Gleichungen für die Spannungsänderung $t^{\mu\nu}$, bezogen auf die ursprünglichen Flächen. Wir können auch die tatsächliche Spannungsänderung $s^{\mu\nu}$ einführen, entweder indem wir mit dem Ausdruck für W (4.14) beginnen, oder indem wir die Beziehungen (4.13) in die Gl. (4.16) und (4.17) einsetzen.

Wir erhalten so die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum^{\nu} \frac{\partial s^{\nu i}}{\partial x^{\nu}} + \sum^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (e\, S^{\nu i}) + \sum^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(S^{\mu\nu} \omega^{i}_{\mu} - S^{\mu i} e^{\nu}_{\mu} \right) + \varrho \, \Delta X^{i} = 0 \; . \; . \; . \; . \; (4.18)$$

und die Randbedingungen:

$$\Delta F^{i} = \sum^{\nu} s^{\nu i} a_{\nu} + e \sum^{\nu} S^{\nu i} a_{\nu} + \sum^{\mu\nu} \left(S^{\mu\nu} \omega^{i}_{\mu} - S^{\mu i} e^{\nu}_{\mu} \right) a_{\nu} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4.19).$$

Die Gl. (4.16), (4.17), (4.18), (4,19) enthalten alle Glieder erster Ordnung, die in einer Theorie der Elastizität eines Körpers unter Vorspannung enthalten sind.

Die Gl. (4.18) können auch in einer anderen Form geschrieben werden, wenn wir die Gleichgewichtsbedingungen (4.1) berücksichtigen, die sich auf die Vorspannungen beziehen, sowie die Identitäten:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(e^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu} \right) = \frac{\partial e^{\mu}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}, \qquad \text{oder} \qquad \sum^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(e^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu} \right) = \frac{\partial e}{\partial x^{\nu}},$$

worin $e = \sum^{\mu} e^{\mu}_{\mu}$.

Die Gl. (4.18) haben die Form

$$\left. \begin{aligned} & \sum^{\nu} \frac{\partial s^{\nu i}}{\partial x^{\nu}} + \varrho \, \Delta X^{i} - \varrho \sum^{\mu} \omega^{i}_{\mu} X^{\mu} + \sum^{\mu\nu} \left(S^{\nu i} \frac{\partial \omega^{\mu}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + S^{\mu\nu} \frac{\partial \omega^{i}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) \\ & \qquad - e\, \varrho\, X^{i} - \sum^{\mu\nu} e^{\nu}_{\mu} \frac{\partial S^{\mu i}}{\partial x^{\nu}} = 0 \end{aligned} \right\} \; . \; . \; . \; (4.20).$$

Die Glieder in Gl. (4.20) lassen eine interessante Deutung zu. Nehmen wir zum Beispiel den Fall einer zwei-dimensionalen Dehnung und setzen

$$\begin{aligned} x^1 &= x & u^1 &= u & X^1 &= X \\ x^2 &= y & u^2 &= v & X^2 &= Y \end{aligned} \qquad e^{\nu}_{\mu} = \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{xy} & e_{yy} \end{vmatrix}, \qquad \omega^{\nu}_{\mu} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{vmatrix},$$

worin

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Mit diesen Bezeichnungen erhalten die Gleichgewichtsbedingungen (4.18) die Form

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial s^{11}}{\partial x}+\frac{\partial s^{12}}{\partial y}+\varrho\,\Delta X+\varrho\,\omega Y \\ &\quad +(S^{11}-S^{22})\frac{\partial\omega}{\partial y}-2S^{12}\frac{\partial\omega}{\partial x} \\ &\quad -e\,\varrho\,X-e_{xx}\frac{\partial S^{11}}{\partial x}-e_{yy}\frac{\partial S^{12}}{\partial y}-e_{xy}\left(\frac{\partial S^{12}}{\partial x}+\frac{\partial S^{11}}{\partial y}\right)=0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (4.21)$$

und eine ähnliche Gleichung für die Y-Richtung.

Die zusätzlichen Glieder in der zweiten und dritten Reihe können als Folge der Formänderung eines infinitesimalen Elementes aufgefaßt werden. Die Glieder in der zweiten Reihe stellen den Einfluß der Krümmung dar. Die Glieder in der dritten Reihe haben ihren Ursprung in einer Art Auftrieb eines Elementes durch seine Formänderung im ursprünglichen Dehnungsfeld. Man erkennt somit, daß die Glieder, die die Krümmung darstellen, nur von ursprünglichen größten Querspannungen abhängen und für den Fall eines anfänglichen gleichmäßigen Druckes verschwinden. Die Glieder, die mit dem Auftrieb zu tun haben, verschwinden, wenn das ursprüngliche Spannungsfeld homogen ist. In diesem Falle, oder wenn wir den anfänglichen Spannungsgradienten und die Massenkraft vernachlässigen, erhalten wir die Gleichungen

$$\frac{\partial s^{11}}{\partial x}+\frac{\partial s^{12}}{\partial y}+(S^{11}-S^{22})\frac{\partial\omega}{\partial y}-2S^{12}\frac{\partial\omega}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial s^{12}}{\partial x}+\frac{\partial s^{22}}{\partial y}+(S^{11}-S^{22})\frac{\partial\omega}{\partial x}+2S^{12}\frac{\partial\omega}{\partial y}=0 \quad (4.22).$$

Diese letzte Art von Gleichungen muß eine große und fundamentale Rolle in Knickungsaufgaben spielen. Man erkennt, daß überhaupt die Möglichkeit einer Knickung im wesentlichen von der Existenz einer Querspannung im ursprünglichen Spannungsfeld abhängt. Diese Folgerungen sind auch im drei-dimensionalen Falle richtig.

5. Anwendungen. Die Dehnungskomponenten zweiter Ordnung in der Plattentheorie. Die Verschiebungen in Biegung und Dehnung werden angenommen wie folgt:

$$u=u_0(x,y)-z\frac{\partial w}{\partial x},\qquad v=v_0(x,y)-z\frac{\partial w}{\partial y},\qquad w=w(x,y).$$

Die Ebene $z=0$ wird als Mittelebene vor der Biegung angenommen. Durch Anwendung der Formel (1.13) erhält man die drei wichtigsten Komponenten des Dehnungstensors:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{11}&=\frac{\partial u_0}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \\ \varepsilon_{22}&=\frac{\partial v_0}{\partial y}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \\ \varepsilon_{12}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)-z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5.1).$$

Isotrope Beziehungen zwischen Spannung und Dehnung mit quadratischen Gliedern.

Wegen der Isotropie fallen die Hauptachsen für Spannung und Dehnung zusammen. Wir wählen die rechtwinkligen Achsen 1, 2, 3, parallel mit den Hauptrichtungen und betrachten jetzt die Spannungskomponente τ_{11} als Funktion der Dehnungskomponenten ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}, die Glieder erster und zweiter Ordnung enthalten. Ein Vertauschen der Achsen 2 und 3 hat wegen der Isotropie keinen Einfluß auf τ_{11}, deshalb

$$\tau_{11}=\lambda\,\varepsilon+G\,\varepsilon_{11}+A\,\varepsilon_{11}^2+B(\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{33}^2)+C\,\varepsilon_{11}(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})+D\,\varepsilon_{22}\,\varepsilon_{33}.$$

In ähnlicher Weise erhalten wir:

$$\begin{aligned} \tau_{22}&=\lambda\,\varepsilon+G\,\varepsilon_{22}+A\,\varepsilon_{22}^2+B(\varepsilon_{33}^2+\varepsilon_{11}^2)+C\,\varepsilon_{22}(\varepsilon_{33}+\varepsilon_{11})+D\,\varepsilon_{33}\,\varepsilon_{11}, \\ \tau_{33}&=\lambda\,\varepsilon+G\,\varepsilon_{33}+A\,\varepsilon_{33}^2+B(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2)+C\,\varepsilon_{33}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+D\,\varepsilon_{11}\,\varepsilon_{22}, \end{aligned}$$

worin $\varepsilon=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$ die kubische Dilatation bedeutet. Unter der Annahme eines elastischen Potentiales müssen die Beziehungen (2.11) befriedigt sein.

$$\frac{\partial\tau_{11}}{\partial\varepsilon_{22}}=\frac{\partial\tau_{22}}{\partial\varepsilon_{11}},\quad \frac{\partial\tau_{22}}{\partial\varepsilon_{33}}=\frac{\partial\tau_{33}}{\partial\varepsilon_{22}},\quad \frac{\partial\tau_{33}}{\partial\varepsilon_{11}}=\frac{\partial\tau_{11}}{\partial\varepsilon_{33}}.$$

Leitet man noch die Beziehung $2B=C$ ab, werden die Beziehungen zwischen Spannung und Dehnung durch fünf Elastizitätskonstante dargestellt. Das Bestehen von fünf physikalischen Konstanten war auch schon von F. D. Murnaghan festgestellt worden, der aber

auf anderem Wege zu diesem Schluß gelangt ist (siehe oben). Die physikalische Bedeutung seiner Konstanten ist jedoch eine andere, als in unserem Falle.

Die Spannungs-Dehnungsbeziehungen können in der äquivalenten Form dargestellt werden:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{11} &= \lambda\varepsilon + G\varepsilon_{11} + L\varepsilon^2 + M\varepsilon_{11}^2 + N(2\varepsilon\varepsilon_{11} + \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2), \\ \tau_{22} &= \lambda\varepsilon + G\varepsilon_{22} + L\varepsilon^2 + M\varepsilon_{22}^2 + N(2\varepsilon\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2), \\ \tau_{33} &= \lambda\varepsilon + G\varepsilon_{33} + L\varepsilon^2 + M\varepsilon_{33}^2 + N(2\varepsilon\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5.2).$$

Im Falle, daß wir es nicht mit den Hauptrichtungen zu tun haben, erhalten wir in Cartesischen Koordinaten

$$\tau_{\mu\nu} = \Big(\lambda\varepsilon + L\varepsilon^2 + N\sum^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\Big)g_{\mu\nu} + (\mu + 2N\varepsilon)\varepsilon_{\mu\nu} + M\sum^{\alpha}\varepsilon_{\mu\alpha}\varepsilon_{\nu\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (5.3),$$

worin $g_{\mu\nu} = 1$, wenn $\mu = \nu$ und $g_{\mu\nu} = 0$, wenn $\mu \neq \nu$. Diese fünf Elastizitätskonstanten λ, G, L, M, N könnten bequem zu einer genaueren Beschreibung sehr elastischer Stoffe benutzt werden.

Erhöhung der Drehungssteifigkeit eines prismatischen Stabes durch axiale Spannung.

Der prismatische Stab wird unter gleichmäßiger axialer Spannung $S_{33} = S$ angenommen; die z-Achse ist parallel mit der Stabachse. Als zusätzliche Spannungskomponenten der Drehung werden die $s_{\mu\nu}$ angenommen. Die Gleichgewichtsbedingungen sind (4.20)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial s_{11}}{\partial x} + \frac{\partial s_{12}}{\partial y} + \frac{\partial s_{13}}{\partial z} + S\frac{\partial \omega_y}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial s_{21}}{\partial x} + \frac{\partial s_{22}}{\partial y} + \frac{\partial s_{23}}{\partial z} - S\frac{\partial \omega_x}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial s_{31}}{\partial x} + \frac{\partial s_{32}}{\partial y} + \frac{\partial s_{33}}{\partial z} + S\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5.4).$$

Die Randbedingungen (4.19) werden

$$\left.\begin{aligned} \Delta F_x &= s_{11}a_1 + s_{12}a_2 + s_{13}a_3 + S\omega_y a_3, \\ \Delta F_y &= s_{21}a_1 + s_{22}a_2 + s_{23}a_3 - S\omega_x a_3, \\ \Delta F_z &= s_{31}a_1 + s_{32}a_2 + s_{33}a_3 + S(e_{11} + e_{22})a_3 - Se_{13}a_1 - Se_{23}a_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5.5).$$

Als **angenähertes** Spannungs-Dehnungsgesetz wird das **Hookesche** Gesetz für ein isotropes Material angenommen:

$$\left.\begin{aligned} &Ee_{11} = s_{11} - \nu(s_{22} + s_{33}), \quad Ee_{22} = s_{22} - \nu(s_{11} + s_{33}), \quad Ee_{33} = s_{33} - \nu(s_{22} + s_{11}) \\ &\qquad 2Ge_{12} = s_{12}, \quad 2Ge_{23} = s_{23}, \quad 2Ge_{31} = s_{31} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (5.6).$$

Es kann leicht gezeigt werden, daß die klassische Lösung der Torsionsaufgabe von **Saint Venant**, die sich auf einen Stab ohne Vorspannung bezieht, auch die obigen Gleichungen befriedigt. Wenn Θ den Drehungswinkel bezeichnet, dann bedeutet s_{23} und s_{13} die Verteilung der Querbeanspruchung über die Schnittfläche und ist durch die folgenden Gleichungen dargestellt:

$$G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \Theta x\right) = s_{23}, \quad G\left(-\Theta y + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = s_{31}, \quad \frac{\partial s_{31}}{\partial x} + \frac{\partial s_{32}}{\partial y} = 0 \quad \ldots \quad (5.7),$$

wobei die Randbedingungen aussagen, daß die Querspannung tangential zu der Schnittfläche sein muß. Wenn wir nun das an der Schnittfläche angreifende Drehmoment berechnen, erhalten wir nicht dasselbe Resultat, das die **Saint Venant**sche Theorie ergeben würde. Das hat seinen Grund in der Tatsache, daß die an der Schnittfläche angreifenden Kräfte, die durch die Randbedingungen (5.5) dargestellt sind, die Form haben:

$$\Delta F_x = s_{13} + S\omega_y, \quad \Delta F_y = s_{23} - S\omega_x \quad \ldots\ldots \quad (5.8).$$

Die Werte von ω_x und ω_y werden aus der **Saint Venant**schen Lösung abgeleitet, und wir erhalten:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\frac{s_{23}}{G} - x\Theta, \quad \omega_y = -\frac{1}{2}\frac{s_{31}}{G} - y\Theta \quad \ldots\ldots \quad (5.9).$$

Das an der Schnittfläche angreifende Gesamtdrehmoment ist:

$$T = \left(1 - \frac{S}{2G}\right)\iint(-s_{13}y + s_{23}x)\,dx\,dy + S\Theta\iint(x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

oder

$$T=\left(1-\frac{S}{2G}\right)T_{SV}+I_G\,S\,\Theta \quad \text{(5.10)}.$$

In diesem Ausdruck bedeutet T_{SV} das aus der Saint Venantschen Theorie abgeleitete Drehmoment und I_G das polare Trägheitsmoment der Schnittfläche, bezogen auf den Schwerpunkt der Fläche.

Der Nullpunkt des Koordinatensystemes x, y muß hier mit dem Schwerpunkte zusammenfallen, damit das aus diesen Gleichungen erhaltene Kraftsystem ein reines Drehmoment ist. Das Glied $\frac{S}{2G}$ kann im Vergleich mit „Eins" vernachlässigt werden, weil es eine Näherung gleicher Ordnung ist, wie die Näherung durch die Einführung des Hookeschen Gesetzes für ein isotropes Material (5.6).

Deshalb ist der Wert des Drehmomentes

$$T=T_{SV}+I_G\,S\,\Theta \quad \text{(5.11)}.$$

Das Korrekturglied für die anfängliche axiale Vorspannung erhält nur dann Bedeutung, wenn die Drehsteifigkeit der Saint Venantschen Theorie klein ist im Vergleich zu $S\,I_G$. Bei-

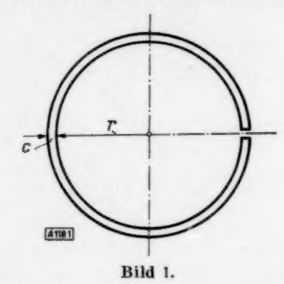


Bild 1.

spielsweise erhalten wir im Falle eines dünnwandigen Zylinders, der parallel seiner Achse aufgeschnitten ist,

$$T=\frac{2}{3}\pi\,r\,c^3\,G\left[1+3\left(\frac{r}{c}\right)^2\frac{S}{G}\right] \quad \text{(5.12)},$$

wobei „r" den Radius und „c" die Wandstärke bedeuten. Wählen wir zum Beispiel $r/c=10$ und $S/G=1/1000$, so erhalten wir durch den Einfluß der axialen Spannung einen Fehler des Saint Venantschen Drehmomentes von 30%. 118

Note on the bending of thin uniformly loaded Plates bounded by Cardioids, Lemniscates and certain other Quartic Curves.

By *Bibhutibhusan Sen,* Krishnagar College, Bengal.

Zusammenfassung. Die Formeln für die Durchbiegung dünner, gleichmäßig belasteter Platten, die von Kardioiden, von Lemniskaten oder von Kurven begrenzt sind, die zur Ellipse bzw. Hyperbel in bezug auf den Mittelpunkt oder zur Ellipse in bezug auf den Brennpunkt als Pol (elliptic Limacon) invers sind, werden abgeleitet. Für den Fall, daß die Ränder eingeklemmt sind, kann die Lösung in geschlossener Form gegeben werden.

Introduction. The normal displacement w of a thin plate bent by transverse forces, satisfies the differential equation[1])

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{Z}{D} \quad \text{(A)},$$

where $Z=$ the constant load per unit of area, and
$D=$ the flexural rigidity.

For a clamped edge, we have on the boundary

$$w=\frac{\partial w}{\partial \nu}=0 \quad \text{(B)}$$

$d\nu$ being an element of outward drawn normal.

[1]) A. E. H. Love: The Mathematical Theory of Elasticity. 3rd. edition (1920), p. 492.

The exact solution of the equation (A) satisfying the boundary conditions (B) is known only for some thin plates of simple forms. The object of this paper is to consider the same problem when the boundaries are Cardioids, Lemniscates, Inverses of ellipses and elliptic Limacons. The results are interesting in so much as they are expressed in finite number of terms.

1. Solution for a Plate bounded by a Cardioid. By using the transformation

$$\xi + i\,\eta = \frac{1}{(x - i\,y)^{\frac{1}{2}}} \qquad (1.1),$$

we obtain

$$\left.\begin{aligned} &\xi = r^{-\frac{1}{2}} \cos\frac{\Theta}{2}, \qquad \eta = r^{-\frac{1}{2}} \sin\frac{\Theta}{2}, \\ \text{and}\quad &\frac{1}{h^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 = \frac{4}{(\xi^2 + \eta^2)^3} \end{aligned}\right\} \qquad (1.2).$$

It is evident that $\xi = \text{constant}$ and $\eta = \text{constant}$ give two families of orthogonal Cardioids. We shall take as the boundary of the plate

$$\xi = \alpha = (2\,a)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{or} \quad r = a\,(1 + \cos\Theta) \qquad (1.3).$$

The above transformation enables us to write the equation (A) in the form

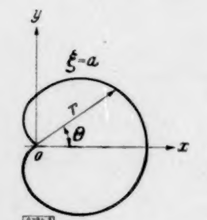


Bild 1.

$$\left[(\xi^2 + \eta^2)^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\right]^2 w = \frac{16\,Z}{D} = 16 \times 64\,p_0 \qquad (1.4),$$

where

$$p_0 = \frac{Z}{64\,D} \qquad (1.5).$$

The particular integral of this equation is given by

$$w = \frac{p_0}{(\xi^2 + \eta^2)^4} \qquad (1.6).$$

Combining this expression with some suitable terms which make

$$\left[(\xi^2 + \eta^2)^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\right]^2 w = 0 \qquad (1.7),$$

we obtain

$$w = \frac{p_0 + P_1(\xi^2 - \eta^2) + P_2\,\xi^2\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^4} + \frac{P_3\,\xi + P_4\,\xi^3}{(\xi^2 + \eta^2)^3} \qquad (1.8),$$

where P_1, P_2, P_3, P_4 are constants.

From the boundary conditions (B) we get

$$\left.\begin{aligned} w &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \text{when} \quad \xi = \alpha.$$

These relations give

$$P_1 = -\frac{p_0}{\alpha^2}, \quad P_2 = -\frac{p_0}{\alpha^4}, \quad P_3 = -\frac{p_0}{\alpha^3}, \quad P_4 = \frac{p_0}{\alpha^5} \qquad (1.9).$$

When these values of the constants are substituted in (1.8), we have

$$w = \frac{p_0}{(\xi^2 + \eta^2)^4}\left[1 - \frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\xi^3}{\alpha^3} + \frac{\xi^5}{\alpha^5} + \frac{\eta^2}{\alpha^2}\left(1 - \frac{\xi}{\alpha} - \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\xi^3}{\alpha^3}\right)\right] \qquad (1.10).$$

Expressed in polar coordinates, this result stands as

$$\left.\begin{aligned} w = p_0\,r^4 \Bigg[1 &- \left(\frac{2\,a}{r}\right)\cos^2\frac{\Theta}{2} - \left(\frac{2\,a}{r}\right)^{\frac{3}{2}}\cos^3\frac{\Theta}{2} + \left(\frac{2\,a}{r}\right)^{\frac{5}{2}}\cos^5\frac{\Theta}{2} \\ &+ \left(\frac{2\,a}{r}\right)\sin^2\frac{\Theta}{2}\left\{1 - \left(\frac{2\,a}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\Theta}{2} - \left(\frac{2\,a}{r}\right)\cos^2\frac{\Theta}{2} + \left(\frac{2\,a}{r}\right)^{\frac{3}{2}}\cos^3\frac{\Theta}{2}\right\}\Bigg] \end{aligned}\right\} \qquad (1.11).$$

It is apparent that the above expression for the normal displacement is symmetrical about the line $\Theta = 0$. The value of the deflection along this line is given by

$$w = p_0 \varrho^4 \left[1 - \frac{2a}{\varrho} - \left(\frac{2a}{\varrho}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{2a}{\varrho}\right)^{\frac{5}{2}}\right] \quad \ldots \ldots \quad (1.12),$$

where ϱ is the distance measured along the line of symmetry from the origin.

On putting

$$\left(\frac{\varrho}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} = X \quad \ldots \ldots \quad (1.13)$$

the above expression becomes

$$(w)_{\Theta=0} = p_0 (2a)^4 X^3 (X^3 - 1)(X^2 - 1) \quad \ldots \ldots \quad (1.14).$$

By simple calculation we find that the maximum displacement on the line of symmetry occurs at a distance

$$\varrho = (\cdot 908 \ldots)\, a \text{ (nearly)} \quad \ldots \ldots \quad (1.15),$$

where its approximate value is

$$(\cdot 029 \ldots) \frac{a^4 Z}{D} \quad \ldots \ldots \quad (1.16).$$

2. Solution for a Plate bounded by a Lemniscate of Bernoulli. Let us consider the system of orthogonal coordinates (ξ, η) defined by

$$\left.\begin{aligned} (z + c)(z - c) &= c^2 e^{2\zeta}, \\ \text{where} \quad \zeta = \xi + i\eta \quad &\text{and} \quad z = x + iy \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2.1).$$

In cartesian coordinates we obtain the relations

$$\left.\begin{aligned} (x^2 - y^2 - c^2)^2 + 4x^2y^2 &= c^4 e^{4\xi}, \\ (x^2 - y^2 - c^2) &= 2xy \cot 2\eta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2.2),$$

so that $\xi =$ constant gives a family of quartic curves[2]) with real foci at $z = \pm c$ and $\eta =$ constant gives the orthogonal family of curves which are rectangular hyperbolas, each of which passes through the foci of the quartic curves. From (2.2) it is evident that the curve $\xi = 0$ gives a Lemniscate of Bernoulli of which the polar equation is

$$r^2 = 2c^2 \cos 2\Theta \quad \ldots \ldots \quad (2.3).$$

At infinity $\xi \to \infty$ while at either focus $\xi \to -\infty$. We shall consider the loop of the Lemniscate of Bernoulli given by the curve $\xi = 0$ which lies in the region

$$-\infty \leqq \xi \leqq 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \eta \leqq \frac{\pi}{2}.$$

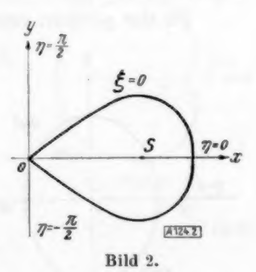
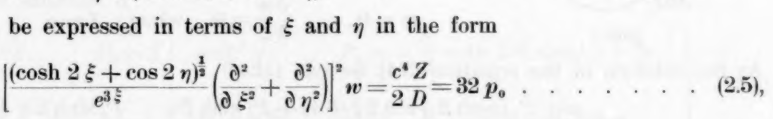


Bild 2.

Since in the present case

$$\frac{1}{h^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 = \frac{c^2 e^{3\xi}}{\sqrt{2}\,(\cosh 2\xi + \cos 2\eta)^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots \quad (2.4),$$

the equation (A) can be expressed in terms of ξ and η in the form



$$\left[\frac{(\cosh 2\xi + \cos 2\eta)^{\frac{1}{2}}}{e^{3\xi}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\right]^2 w = \frac{c^4 Z}{2D} = 32\, p_0 \quad \ldots \ldots \quad (2.5),$$

where

$$p_0 = \frac{c^4 Z}{64 D} \quad \ldots \ldots \quad (2.6).$$

The particular integral of the above equation will be

$$w = p_0 e^{4\xi} \quad \ldots \ldots \quad (2.7).$$

Finding out a few terms which make the left hand side of (2.5) equal to zero, we can write for the purpose of our problem

$$w = p_0 e^{4\xi} + P_1 + P_2 e^{2\xi} \cos 2\eta + P_3 e^{2\xi} \cos \eta\, (\cosh 2\xi + \cos 2\eta)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots \ldots \quad (2.8),$$

where P_1, P_2 and P_3 are constants.

[2]) Basset: Treatise on Hydrodynamics, Vol. 1 (1888), p. 106.

For a clamped edge we must have on the boundary

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \qquad \text{when} \quad \xi = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2.9).$$

These conditions are satisfied if

$$P_1 = p_0, \qquad P_2 = 2\,p_0, \qquad P_3 = -2\sqrt{2}\,p_0 \quad \ldots \ldots \quad (2.10).$$

Hence the normal displacement in this case is obtained as

$$w = p_0\left[e^{4\xi} + 1 + 2\,e^{2\xi}\left\{\cos 2\eta - \sqrt{2}\cos\eta\,(\cosh 2\xi + \cos 2\eta)^{\frac{1}{2}}\right\}\right] \quad \ldots \quad (2.11).$$

At the focus where $\xi \to -\infty$

$$w = p_0 = \frac{c^4 Z}{64\,D} \quad \ldots \ldots \quad (2.12).$$

3. Solution for a Plate bounded by an Inverse of an Ellipse. If we use the transformation[3])

$$x + i\,y = c\sec(\xi + i\,\eta) \quad \ldots \ldots \quad (3.1),$$

we get

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2\,c\cosh\eta\cos\xi}{\cosh 2\eta + \cos 2\xi}, \qquad y = \frac{2\,c\sinh\eta\sin\xi}{\cosh 2\eta + \cos 2\xi} \\ r^4 &= c^2\left(\frac{x^2}{\cosh^2\eta} + \frac{y^2}{\sinh^2\eta}\right) = c^2\left(\frac{x^2}{\cos^2\xi} - \frac{y^2}{\sin^2\xi}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3.2)$$

and

$$\frac{1}{h^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 = \frac{2\,c^2(\cosh 2\eta - \cos 2\xi)}{(\cosh 2\eta + \cos 2\xi)^2} \quad \ldots \ldots \quad (3.3).$$

It is evident that $\eta = \beta$ is the inverse of an ellipse and $\xi = \alpha$ is an inverse of a confocal hyperbola which becomes an arc of a Lemniscate of Bernoulli when $\xi = \frac{\pi}{4}$. Here ξ may have any real value positive or negative but as the values of x and y are periodic in ξ, it is only necessary to consider values of ξ lying between 0 and 2π. Values of η are restricted to all positive real values between zero and infinity. At the origin $\eta \to \infty$ and when $\eta = 0$ we have two double lines extending from the points $x = \pm c$ to infinity in the positive and negative directions respectively.

In the present case the equation (A) reduces to

$$\left[\frac{(\cosh 2\eta + \cos 2\xi)^2}{\cosh 2\eta - \cos 2\xi}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\right]^2 w = \frac{4\,c^4 Z}{D} = 64\,p \quad \text{(say)} \quad (3.4).$$

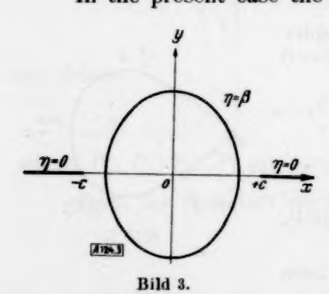


Bild 3.

For clamped edge the boundary conditions are

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad \text{when} \quad \eta = \beta \quad \ldots \ldots \quad (3.5),$$

for an Inverse of an ellipse. For an Inverse of a hyperbola we shall have

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad \text{when} \quad \xi = \alpha \quad \ldots \quad (3.6).$$

As the solution of the equation (3.4) we can take[4])

$$w = \frac{p + P_1(\cosh 2\eta\cos 2\xi + 1) + P_2\sinh 2\eta}{(\cosh 2\eta + \cos 2\xi)^2} + \frac{P_3\sinh 2\eta + P_4}{\cosh 2\eta + \cos 2\xi} \quad \ldots \quad (3.7),$$

where P_1, P_2, P_3, P_4 are constants.

---

[3]) Basset, p. 102.

[4]) For the Inverse of a hyperbola we can take the solution of (3.4) as

$$w = \frac{p + Q_1(\cosh 2\eta\cos 2\xi + 1) + Q_2\sin 2\xi}{(\cosh 2\eta + \cos 2\xi)^2} + \frac{Q_3\sin 2\xi + Q_4}{(\cosh 2\eta + \cos 2\xi)} \quad \ldots \ldots \quad (3.7'),$$

where Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 are constants.

Provided ξ be not equal to $\pi/4$ or a multiple of $\pi/4$, the boundary conditions (3.6) will give

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= p\,\mathrm{cosec}^2\,2\alpha, & Q_2 &= -2\,p\,\mathrm{cosec}\,2\alpha, \\ Q_3 &= 2\,p\,\mathrm{cosec}\,4\alpha, & Q_4 &= -2\,p\,\mathrm{cosec}\,2\alpha\,\mathrm{cosec}\,4\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3.8').$$

Special solutions can also be obtained when $\xi = \pi/4$ or a multiple of $\pi/4$.

The boundary conditions (3.5) will be satisfied if

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= -p \operatorname{cosech}^2 2\beta, & P_2 &= -2p \operatorname{cosech} 2\beta, \\ P_3 &= 2p \operatorname{cosech} 4\beta, & P_4 &= 2p \operatorname{cosech} 2\beta \operatorname{cosech} 4\beta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.8).$$

At the centre where $\eta \to \infty$, we have

$$w = \frac{c^4 Z}{8D} \operatorname{cosech} 4\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.9).$$

4. Solution for a Plate bounded by an elliptic Limacon. By using the transformation[5])

$$\xi + i\eta = 2 \sec^{-1} \sqrt{\frac{x + iy}{2c}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.1),$$

we find that $\eta = \beta$ (constant) represents an inverse of an ellipse with respect to the focus as the pole, that is, an elliptic Limacon. The values of η are restricted to all real positive values between zero and infinity while ξ may have any real value positive or negative.

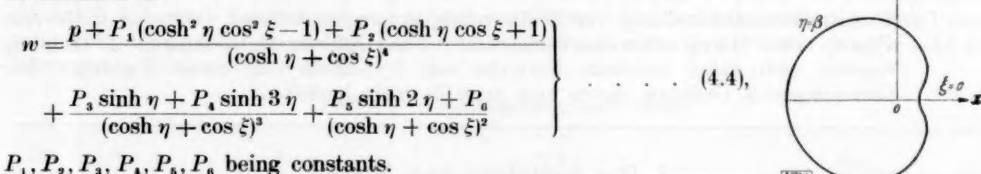
From the above transformation we get

$$\left.\begin{aligned} \frac{4cx}{r^2} &= 1 + \cosh\eta \cos\xi, & \frac{4cy}{r^2} &= \sinh\eta \sin\xi, \\ r &= \frac{4c}{\cosh\eta + \cos\xi}, & \text{and} \quad \frac{1}{h^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 = \frac{16 c^2 (\cosh\eta - \cos\xi)}{(\cosh\eta + \cos\xi)^3} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4.2).$$

These relations enable us to write the equation (A) in the form

$$\left[\frac{(\cosh\eta + \cos\xi)^3}{\cosh\eta - \cos\xi}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\right]^2 w = \frac{256\, c^4 Z}{D} = 64\, p \quad \text{(say)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.3).$$

The solution of this equation suitable for the present problem can be obtained as



$$\left.\begin{aligned} w = {} & \frac{p + P_1(\cosh^2\eta \cos^2\xi - 1) + P_2(\cosh\eta\cos\xi + 1)}{(\cosh\eta + \cos\xi)^4} \\ & + \frac{P_3 \sinh\eta + P_4 \sinh 3\eta}{(\cosh\eta + \cos\xi)^3} + \frac{P_5 \sinh 2\eta + P_6}{(\cosh\eta + \cos\xi)^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.4),$$

Bild 4.

$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ being constants.

On the boundary $\eta = \beta$, we have

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.5).$$

These conditions are satisfied if

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= p \operatorname{cosech}^4\beta, & P_2 &= 2P_1 \cosh^2\beta, & P_3 &= -\frac{P_1}{2}\coth\beta\,(4\sinh^2\beta + 3), \\ P_4 &= \frac{P_1}{2}\coth\beta, & P_5 &= -\frac{P_1}{2}\tanh 2\beta, & P_6 &= -P_1 \cosh^2\beta \operatorname{sech} 2\beta \end{aligned}\right\} \quad (4.6).$$

At the origin where $\eta \to \infty$, we have

$$w = \frac{4c^4 Z}{D} \operatorname{cosech}^4\beta\,[2\coth\beta - \tanh 2\beta] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.7).$$

Summary: In this note the bending of thin uniformly loaded plates bounded by Cardioids, Lemniscates and certain other quartic curves is discussed. Assuming that the boundary is clamped, the solution in each case is obtained in finite number of terms. 124

[5]) Basset, p. 106.

Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 Nr. 2 April 1940

Zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung*).

Untersuchungen zu den Verfahren von Blaeß und Runge-Kutta-Nyström.

Von *Rudolf Zurmühl* in Darmstadt.

(Aus dem Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt, Prof. Dr. A. Walther.)

1. Ziel der Arbeit. Für die numerische Integration von Differentialgleichungen[1]) zweiter und höherer Ordnung gibt es, trotz einer großen Anzahl allgemeiner Lösungsmethoden[2]), nur wenige Verfahren, welche den Näherungsaufbau in unmittelbarer Form, ohne ein Aufspalten in ein System von Gleichungen 1. Ordnung, vornehmen. Wenn sich trotz der Wichtigkeit namentlich der Differentialgleichungen 2. Ordnung für die technischen Wissenschaften die Behandlung durch numerische Integration in der Ingenieur-Mathematik noch nicht so wie erwünscht und möglich vorfindet, so liegt das zu einem Teil in dem Mangel an unmittelbaren und damit auch handlichen Lösungswegen begründet.

Die Verwendungsmöglichkeit numerischer Integrationsverfahren für Ingenieuraufgaben ist noch bei weitem nicht ausgeschöpft. Das technische Schrifttum hat eine Fülle von teils recht verwickelten Sondermethoden in Fällen hervorgebracht, in denen mit einem einzigen brauchbaren Verfahren unmittelbarer Integration der zugrunde liegenden Differentialgleichung eine bessere und meist auch raschere Lösung erzielt wird[3]).

Zu den direkten Näherungsmethoden für Differentialgleichungen höherer Ordnung gehört das Verfahren von Blaeß[4]), welches insbesondere für Differentialgleichungen 2. Ordnung einen sowohl numerisch wie graphisch gangbaren Lösungsweg angibt. Die in ihm entwickelte Rechnungsform ist der Eigenart der Differentialgleichung 2. Ordnung formal wie anschaulich besonders angepaßt. Sie kann daher über die Grenzen des Verfahrens selbst hinaus von Nutzen sein.

Die vorliegende Arbeit setzt sich, nach einer kurzen Einführung in das genannte Verfahren, zwei Aufgaben:

1. Untersuchung über gewisse Fragen der Genauigkeit der Blaeßschen Näherung.
2. Unmittelbare Behandlung von Differentialgleichungen höherer Ordnung nach dem Prinzip des Runge-Kutta-Verfahrens. Für Differentialgleichungen 2. Ordnung ergeben sich dabei bekannte Formeln von Nyström[5]) in neuer Fassung. Für Gleichungen 3. Ordnung lassen sich neue Formeln herleiten.

I. Das Verfahren von Blaeß.

2. Prinzip der Näherung. Das Verfahren fußt auf dem Taylorschen Satz und gehört zu den Lösungsmethoden, welche eine Näherung durch möglichst weitgehendes Angleichen an eine Taylorentwicklung aufzubauen suchen[6]).

Es ist bekannt, daß zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung in t und y aus gegebenen Anfangswerten $t_0, y_0, \dot{y}_0, \ldots$ ein Näherungswert y_1 an einer um einen Schritt $\Delta t = h$ entfernten Nachbarstelle $t_1 = t_0 + h$ nach der Taylorentwicklung berechnet werden kann zu

$$y_1 = y_0 + \dot{y}_0 h + \ddot{y}_0 \frac{h^2}{2!} + \dddot{y}_0 \frac{h^3}{3!} + y_0^{\mathrm{IV}} \frac{h^4}{4!} + \cdots .$$

---

*) D 87 (gekürzt).

[1]) H. von Sanden: Praktische Analysis, Berlin 1923, S. 162 bis 190. — C. Runge, H. König: Vorlesungen über numerisches Rechnen, Berlin 1924, S. 286 bis 323. — Fr. A. Willers: Methoden der praktischen Analysis, Berlin 1928, S. 295 bis 339.

[2]) C. Runge, Fr. A. Willers: Numerische und graphische Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen. Enz. d. Math. Wiss. Bd. II, C 2, S. 147 bis 150. — A. A. Bennet, W. E. Milne: Numerical Integration of Differential Equations. Bull. of the National Research Council, Nr. 92. Washington 1933, S. 71 bis 78.

[3]) Wie weit diese Behauptung zutrifft, zeigt ein von V. Blaeß angegebenes Verfahren zur Lösung von Rand- und Eigenwertaufgaben durch numerische Integration, wobei der Eigenwert als unbestimmter Parameter durch die Rechnung mitgenommen wird: V. Blaeß: Zur Berechnung der Schwingungen stabförmiger Körper mit veränderlichem Querschnitt. Ing.-Arch. Bd. 9 (1938), S. 428 bis 435.

[4]) V. Blaeß: Zur angenäherten Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. VDI Bd. 81 (1937), S. 587 bis 596.

[5]) E. J. Nyström: Über die numerische Integration von Differentialgleichungen. Acta Soc. Sci. fennicae Bd. 50 (1925), Nr. 13.

[6]) Vgl. Runge-Willers: a. a. O.[2]), S. 147 bis 150, und Willers: a. a. O.[1]), S. 305 bis 314.

Für eine Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{y} = f(t, y, \dot{y}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

sind die beiden ersten Glieder durch die Anfangswerte y_0 und $\dot{y}_0 = v_0$ an der Anfangsstelle $t = t_0$ gegeben. Das nächste Glied $\ddot{y}_0 h^2/2$ läßt sich durch Einsetzen der gegebenen Anfangswerte in $\ddot{y}_0 = f(t_0, y_0, v_0)$ unmittelbar aus der Differentialgleichung berechnen. Alle folgenden Glieder mit ihren höheren Ableitungen müssen durch Weiterdifferenzieren der Differentialgleichung (1) gewonnen werden. Da dieses Weiterdifferenzieren, weil es unter Berücksichtigung aller in der Differentialgleichung auftretenden Veränderlichen erfolgen muß, in Gl. (1) also hinsichtlich t, y und $\dot{y} = v$, in den meisten Fällen sehr mühsam, praktisch sogar bald unmöglich wird, so ist dieses Verfahren der Taylorentwicklung als selbständiges Näherungsverfahren kaum in Gebrauch[7].

Das Verfahren von Blaeß bedient sich des Taylorsatzes in unmittelbarer Form gerade bis zu dem Gliede, welches aus der Differentialgleichung durch einfaches Einsetzen, ohne Weiterdifferenzieren zu berechnen ist. Für eine Differentialgleichung 2. Ordnung also wird die Taylorreihe abgebrochen nach dem Glied mit $\ddot{y}$. Die so erzielten Näherungen, die wir mit $\tilde{y}$ und $\dot{\tilde{y}} = \tilde{v}$ bezeichnen wollen, gelten als Rohwerte. Sie werden verbessert durch einen gesonderten Fehlerabgleich in Form von Korrekturen; er führt die Einbeziehung weiterer Taylorglieder herbei, ohne i. a. ein Weiterdifferenzieren der Differentialgleichung zu benötigen.

Für eine Differentialgleichung 2. Ordnung lautet die Berechnung der Rohwerte $\tilde{y}_1$ und $\tilde{v}_1$ nach der verkürzten Taylorformel, geschrieben in der mit y dimensionsgleichen Tangentenerhebung $v\,h$ und mit der gleichfalls auf y-Dimension gebrachten „Abwölbung"

$$a = \ddot{y}\,\frac{h^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

folgendermaßen:

$$\tilde{y}_1 = y_0 + v_0 h + a_0, \qquad \tilde{v}_1 h = v_0 h + 2\,a_0 \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Die numerische Rechnung folgt dem Schema Tafel 1[8], welches, außer der Berechnung der a_i-Werte durch Einsetzen der Werte t_i, $\tilde{y}_i$, $\tilde{v}_i$ in die Differentialgleichung, nur einfache Additionen erfordert. Die Schrittrechnung des Schemas wird nach einer Anzahl von Rohschritten, zweckmäßigerweise fünf, durch die (Grob-) Korrekturrechnung (siehe **3.**) unterbrochen, welche durch Hinzufügen gewisser Verbesserungen V und V' zu den Rohwerten $\tilde{y}_5$ und $\tilde{v}_5 h$ bessere Näherungswerte y_5 und $v_5 h$ liefert. Die Rechnung erfährt so eine Unterteilung in Gruppen zu je fünf Rohschritten. Anfangswerte jeder neuen Gruppe sind die korrigierten Endwerte der alten.

Tafel 1. Rechnungsgang nach Blaeß.

Nr.	t	y_i	$v_i h$	a_i
0	0	y_0	$v_0 h$	$a_0 = f(0, y_0, v_0)\cdot h^2/2$
1	h	$\tilde{y}_1 = y_0 + v_0 h + a_0$	$\tilde{v}_1 h = v_0 h + 2\,a_0$	$a_1 = f(h, \tilde{y}_1, \tilde{v}_1)\cdot h^2/2$
2	$2\,h$	$\tilde{y}_2 = \tilde{y}_1 + \tilde{v}_1 h + a_1$	$\tilde{v}_2 h = \tilde{v}_1 h + 2\,a_1$	$a_2 = f(2\,h, \tilde{y}_2, \tilde{v}_2)\cdot h^2/2$
3	$3\,h$	$\tilde{y}_3 = \ldots$	$\tilde{v}_3 h = \ldots$	$a_3 = \ldots$
4	$4\,h$	$\tilde{y}_4 = \ldots$	$\tilde{v}_4 h = \ldots$	$a_4 = \ldots$
5	$5\,h$	$\tilde{y}_5 = \ldots$	$\tilde{v}_5 h = \ldots$	$a_5 = \ldots$
Korr.		V	V'	
5	$5\,h$	$y_5 = \tilde{y}_5 + V$	$v_5 h = \tilde{v}_5 h + V'$	
6	$6\,h$			

Anschaulich bedeutet die Näherung nach den Schrittgleichungen (3) den Ersatz der strengen Lösungskurve $y(t)$ mit ihrer gemäß der Differentialgleichung stetig veränderlichen Wölbung $\ddot{y} = f(t, y, v)$ durch einen „Parabelzug" $\tilde{y}(t)$ von stückweise fester, jeweils zum Schrittanfang nach $\ddot{y}_i = f(t_i, \tilde{y}_i, \tilde{v}_i)$ errechneter Wölbung. Der auf y-Dimension gebrachte Ausdruck $a_i = \ddot{y}_i h^2/2$ stellt dabei die Abwölbung des Parabelbogens $\tilde{y}(t)$ am Schrittende von der Anfangstangente dar. Die im Zahlenschema verfolgbare Einwirkung der mit $t, \tilde{y}, \tilde{v}$ laufend sich ändernden a-Werte auf die Steigungen v gewährt einen unmittelbaren Einblick in den Mechanismus der Differentialgleichung 2. Ordnung, welche den Verlauf der Lösungskurve durch die mit t, y, v veränderliche Wölbung steuert.

[7] Siehe Bennet-Milne: a. a. O.[2], S. 71 bis 72 oder Willers: a. a. O.[1], S. 305 bis 306.

[8] Es beginnt mit $t_0 = 0$.

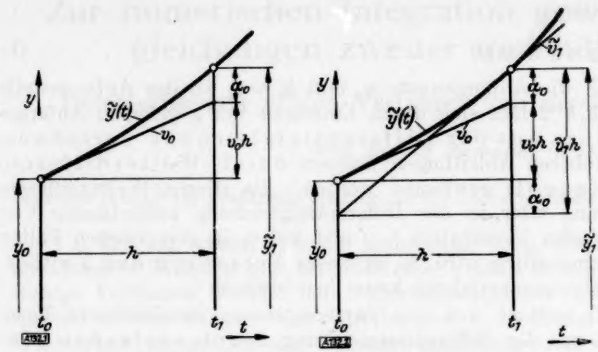


Bild 1 und 2. Aufbau der Näherung nach Blaeß.

Den geometrischen Aufbau der Näherungswerte $\tilde{y}_1$ und $\tilde{v}_1 h$ aus den Anfangswerten y_0 und $v_0 h$ und aus der zum Schrittanfang nach Gl. (1) errechneten Abwölbung a_0 veranschaulichen die Bilder 1 und 2.

Abgesehen von den Besonderheiten des Fehlerabgleichs, auf den noch einzugehen ist, sind für die praktische Handhabung des Verfahrens wesentlich:

1. die unmittelbare Verwendung der zweiten Ableitung zum Näherungsaufbau;
2. die Durchführung der Zahlenrechnung in einheitlicher y-Dimension.

Beide Merkmale führen Anschaulichkeit und Einfachheit der Zahlenrechnung herbei. Von beiden läßt sich auch bei anderen Lösungswegen vorteilhaft Gebrauch machen.

3. Der Fehlerabgleich. Die Verbesserungen V und V', die den rohen Gruppenendwerten $\tilde{y}_5$ und $\tilde{v}_5 h$ zuzuschlagen sind, um eine nachträgliche Einbeziehung höherer Taylorglieder in die Näherung ohne ein Weiterdifferenzieren der Differentialgleichung zu ermöglichen, werden nach Blaeß als lineare Verbindungen aus den im Verlaufe der Schrittgruppe auftretenden veränderlichen a_i-Werten berechnet. Sie lauten:

$$V = \frac{45}{24} a_4 + \frac{100}{24} a_1 - \frac{145}{24} a_0 , \qquad V' = \frac{11}{12} a_5 + \frac{5}{12} a_1 - \frac{16}{12} a_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Die damit erhaltenen Näherungen am Gruppenende, zugleich die Anfangswerte der neuen Fünfergruppe, sind:

$$y_5 = \tilde{y}_5 + V, \qquad v_5 h = \tilde{v}_5 h + V' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Den Werten V und V' in Gl. (4) liegt, wie erforderlich, die Veränderlichkeit der Werte $\ddot{y}_i$ (anschaulich der Abwölbungen a_i) innerhalb des Gruppenschrittes $5h$ zugrunde. Beide Ausdrücke V und V' werden Null für $\ddot{y} =$ konst, wenn also höhere Taylorglieder fehlen. Auf die Herleitung der Formeln und die Auswahl der in ihnen herangezogenen a-Werte wird im II. Abschnitt eingegangen.

Außer der soeben besprochenen (Grob-) Korrektur, welche für mittlere Genauigkeiten, also namentlich bei technischen Anwendungen, fast immer ausreicht, ist von Blaeß noch eine weitergehende „Feinkorrektur" entwickelt worden[9]), mit der sich im Bedarfsfalle die Genauigkeit wesentlich steigern läßt. Die Feinkorrektur verwendet die ersten partiellen Ableitungen f_y und f_v der Differentialgleichung $\ddot{y} = f(t, y, v)$. Sie wird jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht berücksichtigt.

II. Berechnungen zum Fehlerabgleich nach Blaeß.

4. Ziel der Rechnung. Zum Zwecke der Rechnungsvereinfachung und kurzen Darstellung sind a. a. O.[4]) die zur Herleitung der Korrektur erforderlichen Differentiationen und Taylorentwicklungen allein hinsichtlich t angegeben worden[10]). Hier wird eine Durchrechnung unter Beachtung aller drei Veränderlichen t, y, v gegeben.

Zu vergleichen sind die rohen Gruppenendwerte $\tilde{y}_5$ und $\tilde{v}_5 h$ mit den Werten $\bar{y}_5$ und $\bar{v}_5 h$ einer Taylorentwicklung vom Gruppenanfang t_0, y_0, v_0 her über einen Gruppenschritt $\Delta t = 5h$. Der Unterschied von Taylorwert gegen Rohwert, also $\bar{y}_5 - \tilde{y}_5$ bzw. $\bar{v}_5 h - \tilde{v}_5 h$, den wir den „Fehler" nennen wollen, soll durch Verbesserungen V und V' (Korrekturen), welche den Rohwerten zuzuschlagen sind, soweit wie möglich zum Abgleich gebracht werden.

Die Verbesserungen V und V' werden dabei als lineare Verbindungen aus den a-Werten der Gruppenrechnung aufgebaut, also nach einem Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} V &= A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + A_4 a_4 + A_5 a_5 \\ V' &= B_0 a_0 + B_1 a_1 + B_2 a_2 + B_3 a_3 + B_4 a_4 + B_5 a_5 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

[9]) Bisher nicht veröffentlicht. Vgl. aber Blaeß, a. a. O.[4]), S. 589 links, 18. bis 15. Zeile von unten.

[10]) Blaeß, a. a. O.[4]), S. 589, links: „An Stelle von nur drei Gliedern . . . . .".

Darin sind die noch unbestimmten Beiwerte A und B so zu wählen, daß zwischen „Fehlern" $\bar{y}_5 - \tilde{y}_5$ bzw. $\bar{v}_5 h - \tilde{v}_5 h$ und Verbesserungen V bzw. V' eine möglichst weitgehende Übereinstimmung hinsichtlich der Taylorglieder erreicht wird.

Eine Taylorentwicklung über den Gruppenschritt $\Delta t = 5h$ liefert für y_5 und $v_5 h$ die Taylorwerte:

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_5 &= y_0 + 5 v_0 h + 25 a_0 + 125 \dddot{y}_0 \frac{h^3}{3!} + 625 y_0^{\mathrm{IV}} \frac{h^4}{4!} + 3125 y_0^{\mathrm{V}} \frac{h^5}{5!} + \cdots \\ \bar{v}_5 h &= v_0 h + 2 \cdot 5 a_0 + 3 \cdot 25 \dddot{y}_0 \frac{h^3}{3!} + 4 \cdot 125 y_0^{\mathrm{IV}} \frac{h^4}{4!} + 5 \cdot 625 y_0^{\mathrm{V}} \frac{h^5}{5!} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Die rohen Gruppenendwerte $\tilde{y}_5$ und $\tilde{v}_5 h$ gehen aus den fünfmal hintereinander angewandten Schrittgleichungen (3) hervor zu:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{y}_5 &= y_0 + 5 v_0 h + 9 a_0 + 7 a_1 + 5 a_2 + 3 a_3 + a_4 \\ \tilde{v}_5 h &= v_0 h + 2 \cdot (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Ein Vergleich der Werte (7) und (8), also das Aufstellen der Fehler, sowie das Nachbilden der Fehler durch die Verbesserungen V und V' nach Ansatz (6) setzt zunächst voraus:

1. Umschreiben der höheren Ableitungen $\dddot{y}, y^{\mathrm{IV}}, y^{\mathrm{V}}, \ldots$ auf Differentialausdrücke der zweiten Ableitung $\ddot{y} = f(t, y, v) = f$ durch vollständiges Differenzieren der Differentialgleichung (1) nach t;

2. Entwicklung der Werte a_1 bis a_5, also f_1 bis f_5 in eine Taylorreihe aus dem Ausgangswert $f_0 = f$ und dessen Differentialausdrücken.

5. Durchführung. Die höheren Ableitungen $\dddot{y}, y^{\mathrm{IV}}, y^{\mathrm{V}}, \ldots$ entstehen durch mehrfaches vollständiges Differenzieren der Differentialgleichung $\ddot{y} = f(t, y, v)$ nach t. Man führt hierzu [11]) zweckmäßig einen Operator D ein, welcher, angewandt auf eine beliebige Funktion $\varphi(t, y, v)$, den Ausdruck

$$D \varphi = \varphi_t + v \varphi_y + f \varphi_v \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

liefert mit $v = \dot{y}$ und $f = \ddot{y}$.

Außer den gebräuchlichen Kürzungen

$$D^2 f = \left[\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial y} + f \frac{\partial}{\partial v}\right]^2 f$$

$$D^3 f = \left[\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial y} + f \frac{\partial}{\partial v}\right]^3 f$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

mit symbolisch verstandener Klammerpotenz werden gewisse Ausdrücke, welche sowohl bei den höheren Ableitungen als auch bei der Taylorentwicklung der a_i-Werte in gleicher Form auftreten, zweckmäßig zu weiteren Kürzungen zusammengefaßt, nämlich:

$$D^2 f + f f_y = D_{\mathrm{I}}^2 f, \qquad D^3 f + 3 f D f_y = D_{\mathrm{I}}^3 f, \qquad f_y D f + f_v D_{\mathrm{I}}^2 f = D_{\mathrm{II}}^3 f \quad \ldots \quad (10).$$

Mit diesen Kürzungen schreiben sich die Ableitungen $\dddot{y}$ bis y^{V}, die sich von jetzt an auf den Gruppenanfang $t = 0$ beziehen sollen:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= f \\ \dddot{y}_0 &= D f \\ y_0^{\mathrm{IV}} &= D_{\mathrm{I}}^2 f + f_v D f \\ y_0^{\mathrm{V}} &= D_{\mathrm{I}}^3 f + D_{\mathrm{II}}^3 f + 3 D f_v D f + f_v^2 D f \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Die Taylorentwicklung der Werte $a_i = f_i h^2/2$ für $i = 1$ bis 5 vom Ausgangswert $a_0 = f_0 h^2/2 = f h^2/2$ aus ergibt:

---

[11]) Siehe z. B. Runge-König: a. a. O.[1]), S. 287 und Willers: a. a. O.[1]), S. 305. Der dort verwandte Operator D für zwei Veränderliche t, y wird hier sinngemäß erweitert auf drei Veränderliche t, y, v.

Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 Nr. 2 April 1940

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= f\frac{h^2}{2!}\\
a_1 &= f\frac{h^2}{2!} + 3\,Df\frac{h^3}{3!} + 6\,D_{\rm I}^2 f\frac{h^4}{4!} + 10\,D_{\rm I}^3 f\frac{h^5}{5!} + \dots\\
a_2 &= f\frac{h^2}{2!} + 6\,Df\frac{h^3}{3!} + (24\,D_{\rm I}^2 f + 12\,f_v\,Df)\frac{h^4}{4!} + (80\,D_{\rm I}^3 f + 30\,D_{\rm II}^3 f + 120\,Df_v\,Df)\frac{h^5}{5!} + \dots\\
a_3 &= f\frac{h^2}{2!} + 9\,Df\frac{h^3}{3!} + (54\,D_{\rm I}^2 f + 36\,f_v\,Df)\frac{h^4}{4!} + (270\,D_{\rm I}^3 f + 150\,D_{\rm II}^3 f\\
&\qquad + 540\,Df_v\,Df + 60\,f_v^2\,Df)\frac{h^5}{5!} + \dots\\
a_4 &= f\frac{h^2}{2!} + 12\,Df\frac{h^3}{3!} + (96\,D_{\rm I}^2 f + 72\,f_v\,Df)\frac{h^4}{4!} + (640\,D_{\rm I}^3 f + 420\,D_{\rm II}^3 f\\
&\qquad + 1440\,Df_v\,Df + 240\,f_v^2\,Df)\frac{h^5}{5!} + \dots\\
a_5 &= f\frac{h^2}{2!} + 15\,Df\frac{h^3}{3!} + (150\,D_{\rm I}^2 f + 120\,f_v\,Df)\frac{h^4}{4!} + (1250\,D_{\rm I}^3 f + 900\,D_{\rm II}^3 f\\
&\qquad + 3000\,Df_v\,Df + 600\,f_v^2\,Df)\frac{h^5}{5!} + \dots
\end{aligned}\right\}\quad \dots \quad (12).$$

Mit den Werten (11) und (12) lassen sich aus den Gl. (7) und (8) die F e h l e r $\bar{y}_5 - \tilde{y}_5$ bzw. $\bar{v}_5\,h - \tilde{v}_5\,h$ anschreiben:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{y}_5 - \tilde{y}_5 &= 35\,Df\frac{h^3}{3!} + (205\,D_{\rm I}^2 f + 385\,f_v\,Df)\frac{h^4}{4!}\\
&\quad + (1205\,D_{\rm I}^3 f + 2105\,D_{\rm II}^3 f + 5715\,Df_v\,Df + 2705\,f_v^2\,Df)\frac{h^5}{5!} + \dots\\
\bar{v}_5\,h - \tilde{v}_5\,h &= 15\,Df\frac{h^3}{3!} + (140\,D_{\rm I}^2 f + 260\,f_v\,Df)\frac{h^4}{4!}\\
&\quad + (1125\,D_{\rm I}^3 f + 1925\,D_{\rm II}^3 f + 5175\,Df_v\,Df + 2525\,f_v^2\,Df)\frac{h^5}{5!} + \dots
\end{aligned}\right\}\quad \dots \quad (13).$$

Die Fehler (13) sind jetzt durch eine lineare Verbindung der in Gl. (12) angeschriebenen a-Werte nach Ansatz (6) zu Verbesserungen V und V' derart nachzubilden, daß zwischen Fehlern (13) und Verbesserungen (6) eine Übereinstimmung in möglichst vielen h-Potenzen erzielt wird. Gleichheit in einer gewissen h-Potenz verlangt jedoch, wie Gl. (12) und (13) zeigen, von h^4 an das Abstimmen einer ständig wachsenden Anzahl von Einzelgliedern, welche hier bereits als Kürzungen (10) hervorgehoben sind. Dem entspricht eine mit fortschreitender h-Potenz wachsende Anzahl von Bedingungen, wodurch die Forderung weitergehender Angleichung von korrigierter Näherung und Taylorwert bald ihre Begrenzung findet[12]).

Wünscht man zunächst einen Abgleich bis h^4, so sind in y und $v\,h$ die vier Ausdrücke:

f für h^2

Df für h^3

$D_{\rm I}^2 f$ und $f_v\,Df$ für h^4

zu erfassen. Für die je sechs Beiwerte A_i und B_i zu den Werten a_0 bis a_5 einer Fünfergruppe ergeben sich aus der geforderten Übereinstimmung zwischen Fehlern (13) und Verbesserungen (6) in den vier Ausdrücken je v i e r l i n e a r e G l e i c h u n g e n. Je zwei Beiwerte können hiernach frei gewählt, z. B. gleich Null gesetzt werden, worauf für die verbleibenden A_i und B_i die linearen Gleichungssysteme heranzuziehen sind.

6. Ergebnis. Nach Aufschreiben dieser (hier kürzehalber nicht wiedergegebenen) linearen Gleichungen zeigt sich jedoch:

Jedes der beiden Gleichungssysteme ist i n s i c h u n v e r t r ä g l i c h derart, daß der Abgleich der dritten h-Potenz den gleichzeitigen Abgleich b e i d e r Ausdrücke der vierten h-Potenz ausschließt. Ein Fehlerabgleich bis h^4 tritt nur ein, wenn das Glied $f_v\,Df$, d. h. aber die Abhängigkeit der Differentialgleichung von $\dot{y} = v$, fehlt.

[12]) Entsprechende Überlegungen sind für Differentialgleichungen 1. Ordnung bei der Entwicklung der verschiedenen Runge-Kutta-Formeln entscheidend gewesen. Vgl. C. Runge: Math. Ann. Bd. 46 (1895), S. 167 bis 178. — K. Heun: Z. Math. Phys. Bd. 45 (1900), S. 23 bis 38. — W. Kutta: Z. Math. Phys. Bd. 46 (1901), S. 435 bis 453.

Mit der (Grob-) Korrektur des Blaeß-Verfahrens wird also folgendes erzielt[13]:

1. Für den allgemeinen Fall $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y})$ ergibt die Korrektur volle Übereinstimmung zwischen Näherung und Taylorentwicklung bis zur dritten h-Potenz für y und $v\,h$. Ein Abgleich in höheren Taylorgliedern ist auf diesem Wege grundsätzlich nicht mehr möglich.
2. Für den Sonderfall $\ddot{y} = f(t, y)$, also bei fehlender Abhängigkeit der Differentialgleichung von $\dot{y} = v$, wird auch das Taylorglied mit y^{IV} noch voll erfaßt. Ein Abgleich in weiteren Taylorgliedern ist auch hier nicht möglich, da die zum nächsten Gliede gehörigen Bedingungsgleichungen einander ausschließen.

Die Zahl der zu einer Gruppe zusammengefaßten Einzelschritte spielt dabei, sobald in den a_i-Werten alle für den Abgleich wesentlichen Differentialausdrücke erscheinen, keine Rolle. Eine Genauigkeitssteigerung kann, wenn erwünscht, mit der in **3.** erwähnten Feinkorrektur[9]) herbeigeführt werden.

Die Genauigkeit der von der (Grob-) Korrektur erzielten Näherung für y und $v\,h$ könnte hiernach im allgemeinen Falle als „von der Ordnung h^3" (Fehler von der Ordnung h^4), im Sonderfalle fehlender Abhängigkeit der Differentialgleichung von $\dot{y}$ als „von der Ordnung h^4" (Fehler von der Ordnung h^5) angegeben werden. Zu dieser schon seit Euler üblichen (z. B. auch von C. Runge angewandten) Art der Genauigkeitsangabe ist zu bemerken, daß sie für die praktische Genauigkeitsbeurteilung eines Verfahrens nur von bedingtem Wert ist. Bei großen Zahlenwerten höherer Ableitungen gewinnen auch die höheren Taylorglieder Einfluß auf das Zahlenergebnis, wodurch eine Abschätzung der Fehlergröße auf dem üblichen Wege hinfällig wird. — Ein vom Mathematiker angestrebter geschlossener Fehlerausdruck wird sich hier, ähnlich wie beim Runge-Kutta-Verfahren, allgemein schwer angeben lassen; auch würde er für die praktische Fehlerschätzung nur von geringem Nutzen sein[14]).

7. Eine Korrektur der Zwischenwerte. Näherungswerte im Sinne des Verfahrens von Blaeß sind die korrigierten Gruppenend- bzw. -anfangswerte. Schritt im Sinne dieser endgültigen Näherung ist also der Gruppenschritt $5h$. Die Zwischenwerte $\tilde{y}_1$ bis $\tilde{y}_5$ und $\tilde{v}_1$ bis $\tilde{v}_5$ bilden zunächst lediglich die Grundlage für den Fehlerabgleich. Sie können indessen in gewissen Grenzen mit Hilfe einer passend abgestuften Zwischenkorrektur zur Näherung mit herangezogen werden. Eine solche Korrektur, welche die volle Einbeziehung des Taylorgliedes mit $\dddot{y}$ für die Zwischenwerte y_i und $v_i\,h$ leistet, ergibt sich auf Grund der Angaben in **5**. Sie lautet:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \tilde{y}_1 + \frac{1}{35} V & v_1 h &= \tilde{v}_1 h + \frac{1}{5} V' \\ y_2 &= \tilde{y}_2 + \frac{5}{35} V & v_2 h &= \tilde{v}_2 h + \frac{2}{5} V' \\ y_3 &= \tilde{y}_3 + \frac{12}{35} V & v_3 h &= \tilde{v}_3 h + \frac{3}{5} V' \\ y_4 &= \tilde{y}_4 + \frac{22}{35} V & v_4 h &= \tilde{v}_4 h + \frac{4}{5} V' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5\text{a}).$$

III. Verfahren nach dem Runge-Kutta-Prinzip.

8. Runge-Kutta-Näherung für Differentialgleichungen 2. Ordnung. Es erscheint lohnend, die im Blaeß-Verfahren für Differentialgleichungen 2. Ordnung angewandte Rechnungsform auf eine Methode zu übertragen, welche bei Differentialgleichungen 1. Ordnung in ähnlicher Problemstellung zum Erfolg führt. Wir meinen das Prinzip der Runge-Kutta-Näherung.

Das Runge-Kutta-Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen 1. Ordnung[15]) bedient sich verschiedener vorläufiger Steigungswerte $\dot{y}$ oder besser vorläufiger Tangentenerhebungen $k_i = \dot{y}\,h$, genommen an verschiedenen Stellen im Schrittinnern. Aus diesen Werten k_i wird ein Mittelwert k so gebildet, daß der damit berechnete Neuwert $y_1 = y_0 + k$ am Schrittende in möglichst vielen Gliedern mit einer Taylorentwicklung übereinstimmt.

Überträgt man dieses Prinzip der Mittelung auf Differentialgleichungen 2. Ordnung, so treten an die Stelle der Steigungen $\dot{y}$ die Wölbungen $\ddot{y}$, an die Stelle der Erhebungen

---

[13]) Für den einfachen Sonderfall $\ddot{y} = f(t)$ erreicht die Korrektur nach Gl. (4) nicht nur vollen Fehlerabgleich in h^4 für y und $v\,h$, sondern, herbeigeführt durch die getroffene Auswahl der drei a-Werte für V und V' aus den Werten a_0 bis a_5, eine weitgehende Annäherung in den höheren Taylorgliedern weit über y^{IV} hinaus. Für diesen Sonderfall $\ddot{y} = f(t)$, also für den Fall der zweifachen mechanischen Quadratur, erzielt schon die (Grob-)Korrektur so hohe Genauigkeiten, wie sie im allgemeinen Falle die Feinkorrektur herbeiführt.

[14]) Vgl. hierzu R. v. Mises: Zur mechanischen Quadratur. Z. angew. Math. Mech. Bd. 13 (1933), S. 53 bis 56.

[15]) Darstellungen siehe a. a. O.[1]).

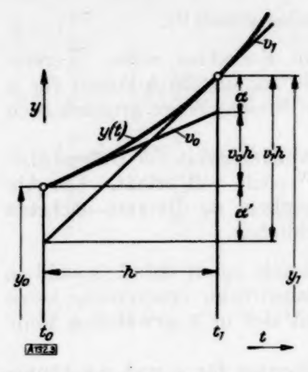


Bild 3. Aufbau der Näherungswerte nach Gl. (14).

$k_i = \dot{y}\,h$ die Abwölbungen $a_i = \ddot{y}\,h^2/2$. Aus vorläufigen a_i-Werten, berechnet an Zwischenstellen $t_0 + \lambda h$ im Schrittinnern mit Zwischenwerten y und v, sind zwei Mittelwerte a und a' zu bilden, aus denen die beiden Neuwerte y_1 und $v_1 h$ in $t_1 = t_0 + h$ berechnet werden können in einer der Gl. (3) ähnlichen Form:

$$y_1 = y_0 + v_0 h + a, \qquad v_1 h = v_0 h + a + a' \quad . \quad . \quad (14).$$

Diese Endrechnung wird in Bild 3 veranschaulicht.

Die Zwischenwerte y und $v\,h$ werden nach Schrittgleichungen errechnet, die aus (3) durch Umschreiben auf den Teilschritt λh entstehen, wobei grundsätzlich alle bis dahin im Schritt bekannten Werte a_i in geeigneten Anteilen $\sigma_i a_i$ bzw. $\tau_i a_i$ herangezogen werden können. Die Zwischenwerte sind also von der Form:

$$y = y_0 + \lambda v_0 h + \lambda^2 \Sigma \sigma_i a_i,$$
$$v\,h = v_0 h + 2\lambda \Sigma \tau_i a_i.$$

Für die Zwischenstellen werden zweckmäßig die in der gebräuchlichen Runge-Kutta-Formel bewährten Bruchteile

$$\lambda = 0, \quad \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{2}, \quad 1$$

vorgesehen. Aus den an diesen Stellen berechneten vier Werten a_1, a_2, a_3, a_4 werden die zwei Mittelwerte a und a' zur Berechnung der endgültigen Näherungen y_1 und $v_1 h$ am Schrittende aufgebaut.

Das Ergebnis einer nach diesem Plan durchgeführten Rechnung ist nicht neu. Die gewonnenen Formeln stimmen inhaltlich mit Formelsätzen von Nyström[5]) überein, die dieser — in Form und Herleitung anders — für Differentialgleichungen 2. Ordnung und für Systeme solcher Gleichungen angegeben hat. Der hier verfolgte Weg zeigt die Formeln nach Auffassung und Handhabung in neuem Licht:

1. Die Nyström-Formeln erscheinen hier als folgerichtige Fortentwicklung der Runge-Kutta-Näherung auf Differentialgleichungen 2. Ordnung, indem die der Mittelung unterzogene Wölbung $\ddot{y}$ an die Stelle der die Differentialgleichungen 1. Ordnung kennzeichnenden Steigung $\dot{y}$ tritt. Der Gedanke Nyströms, das zuvor übliche Vorgehen des Aufspaltens in zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung[16]) durch unmittelbare Behandlung der Differentialgleichung 2. Ordnung zu ersetzen[17]), wird durch unsere Betrachtungsweise anschaulich bestätigt.
2. In der hier gewählten Form erhalten die Nyström-Formeln eine Fassung, die das Verfahren namentlich auch dem wissenschaftlich arbeitenden Ingenieur als ein zuverlässiges und in der Handhabung einfaches Instrument zur Lösung von Differentialgleichungen 2. Ordnung zugänglich macht.

9. Neue Fassung der Nyström-Formeln. Die Durchführung eines Nyström-Schrittes h, der einer Schrittgruppe $5h$ des Blaeß-Verfahrens ähnlich ist, gliedert sich wie folgt:

1. Vorbereitende Schrittrechnung zur Gewinnung von vier vorläufigen Werten a_i an den Zwischenstellen $t - t_0 = 0, h/2, h/2, h$:

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= f(t_0;\ \ y_0;\ \ v_0 h)\frac{h^2}{2}\\
a_2 &= f\left(t_0 + \frac{h}{2};\ \ y_0 + \frac{1}{2} v_0 h + \frac{1}{4} a_1;\ \ v_0 h + a_1\right)\frac{h^2}{2}\\
a_3 &= f\left(t_0 + \frac{h}{2};\ \ y_0 + \frac{1}{2} v_0 h + \frac{1}{4} a_1;\ \ v_0 h + a_2\right)\frac{h^2}{2}\\
a_4 &= f(t_0 + h;\ \ y_0 + v_0 h + a_3;\ \ v_0 h + 2 a_3)\frac{h^2}{2}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (15).$$

An Stelle der Werte $\dot{y} = v$ sind die mit y dimensionsgleichen Werte $v\,h$ verwendet.

2. Mittelbildungen a und a':

$$a = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3), \qquad a' = \frac{1}{3}(a_2 + a_3 + a_4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

[16]) Siehe z. B. Fr. A. Willers, a. a. O.[1]), S. 325, Gl. (5).
[17]) Nyström, a. a. O.[5]), S. 7, § 2.

3. **Endrechnung der Neuwerte:**

$$y_1 = y_0 + v_0 h + a, \qquad v_1 h = v_0 h + a + a' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14).$$

Die Rechnung wird übersichtlich in folgendem Schema nach Tafel 2 durchgeführt (beginnend mit $t_0 = 0$):

Tafel 2. Nyström-Rechnung in neuer Fassung.

t	y	$v\,h$	a_i	$a,\ a'$
0	y_0	$v_0\,h$	a_1	a
$h/2$	$y_0 + \frac{1}{2}\,v_0\,h + \frac{1}{4}\,a_1$	$v_0\,h + a_1$	a_2	a'
$h/2$	„ „ „	$v_0\,h + a_2$	a_3	
h	$y_0 + v_0\,h + a_3$	$v_0\,h + 2\,a_3$	a_4	
h	y_1	$v_1\,h$		

Zunächst wird Zeile für Zeile eines Schrittes bis zum Doppelstrich gerechnet. Es wechseln ab: Bestimmung des a_i-Wertes durch Einsetzen der in gleicher Zeile stehenden Werte $t, y, v\,h$ in die Differentialgleichung; Berechnung der Zwischenwerte y und $v\,h$ der neuen Zeile mit dem voranbestimmten a_i-Wert in der im Schema angegebenen Weise. — Nach Vorliegen des letzten a-Wertes a_4 erfolgt hinter dem Doppelstrich die Mittelbildung a und a' nach (16); danach die Endrechnung der Neuwerte nach (14).

Die Werte y_i und $v_i\,h$ der **ersten** Zeile jedes Schrittes werden als die endgültigen Näherungen zweckmäßig unterstrichen, da auf sie bei der Aufstellung der Zwischenwerte y und $v\,h$ der drei folgenden Zeilen und bei der Endrechnung zurückgegriffen wird. Die Berechnung des y-Wertes der beiden Mittelzeilen ist bei einer ohnehin zu empfehlenden Maschinenrechnung bequem durch Eintasten der **ganzen** Werte $v_0\,h$ und a_1 und Multiplizieren mit 0,5 bzw. 0,25 auszuführen.

Für **Sonderfälle**, in denen $\ddot y$ unabhängig ist von y oder $\dot y$, ergeben sich willkommene Vereinfachungen[18]):

A. **Sonderfall:** $\ddot y = f(t, v)$, **unabhängig von** y.

Die Zwischenwerte für y brauchen nicht berechnet und im Schema mitgeführt zu werden, wodurch sich die Rechnung vereinfacht. Mittelbildungen (16) und Endrechnung (14) bleiben unverändert. Inhaltlich stimmt die Rechnung jetzt mit den Runge-Kutta-Formeln für zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung überein. Erläuterung durch Zahlenbeispiel 1, Tafel 4.

B. **Sonderfall:** $\ddot y = f(t, y)$, **unabhängig von** $\dot y = v$[19]).

Die Zwischenwerte für $v\,h$ brauchen nicht berechnet und im Schema mitgeführt zu werden. Da die t- und y-Werte der beiden Mittelzeilen je in sich gleich sind, so **verkürzt sich das Schema um eine Zeile auf nur drei Zeilen**, ein gegenüber den alten Runge-Kutta-Formeln[16]) bei der Wichtigkeit dieses Sonderfalles wesentlicher Vorteil. Mit abgeänderten Bezeichnungen (a_1, a_2, a_3) lautet das Schema:

Tafel 3. Nyström-Rechnung in neuer Fassung für $\ddot y = f\,(t,\ y)$.

t	y	$v\,h$	a_i	$a,\ a'$
0	y_0	$v_0\,h$	a_1	a
$h/2$	$y_0 + \frac{1}{2}\,v_0\,h + \frac{1}{4}\,a_1$		a_2	a'
h	$y_0 + v_0\,h + a_2$		a_3	
h	y_1	$v_1\,h$		

Für die **Mittelbildung** ist der Wert a_2 der mittleren Zeile doppelt zu zählen:

$$a = \frac{1}{3}\,(a_1 + 2\,a_2), \qquad a' = \frac{1}{3}\,(a_3 + 2\,a_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16a).$$

Die **Endrechnung** erfolgt unverändert nach Gl. (14).

[18]) Der Sonderfall $\ddot y = f(t)$ führt auf eine der Simpsonregel entsprechende Formel für zweifache Quadratur.

[19]) Dieser Fall entspricht den Nyström-Formeln Nr. II, Nyström, a. a. O. [5]), S. 24.

Für Systeme von Differentialgleichungen 2. Ordnung werden die angegebenen Formeln nach Nyström entsprechend erweitert. Das Rechnungsschema ergibt sich durch Vervielfachung der in Tafel 2 bzw. Tafel 3 dargestellten Anordnung gemäß mehreren Veränderlichen $x, y, \ldots$. Namentlich die in der Technik wichtigen Differentialgleichungen 4. Ordnung lassen sich so durch Aufspalten in ein System von zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung behandeln. Eine unmittelbare Behandlung erscheint nicht zweckmäßig, weil im Rechenschema unbequeme Vorzahlen auftreten würden.

Die Genauigkeit des Nyström-Verfahrens[20]) ist ähnlich der des Runge-Kutta-Verfahrens von der Ordnung h^4 (Fehler von der Ordnung h^5) für y und v. Ein praktisch brauchbarer Fehlerüberschlag, der sich auch zur Verbesserung der Werte y (und ebenso von v bzw. $v\,h$) benutzen läßt, ergibt sich aus einer mit doppelter Schrittweite $2\,h$ wiederholten Rechnung (Grobrechnung). Die allerdings nur bei genügend kleiner Schrittgröße h sinnvolle Regel lautet[21]):

$$\Delta = \frac{1}{15}(y - y_{\text{grob}}), \qquad y_{\text{korr}} = y + \Delta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

Die Wahl der Schrittgröße h richtet sich nach der geforderten Genauigkeit; eine allgemeine Regel läßt sich dafür nicht angeben. Die Genauigkeit ist i. a. um so größer, je weniger der letzte Wert a_4 (a_3 im Sonderfall B) des alten Schrittes vom a_1-Wert des neuen Schrittes verschieden ist. Der Schritt ist sicher zu groß, wenn beide a-Werte stark voneinander abweichen. Die Schrittgrößen h sind u. U. im Laufe der Rechnung entsprechend abzustufen.

Zur Erläuterung des Rechnungsganges folgen zwei einfache Zahlenbeispiele, und zwar für die Sonderfälle A und B. Die Durchrechnung eines allgemeinen Falles wird in **11.** wiedergegeben.

1. Beispiel: $\ddot{y} = -2\,\dot{y}$ Strenge Lösung: $y = 1 - e^{-2t}$

$y_0 = 0$, $v_0 = 2$ $t = 0{,}1$: $y = 0{,}181\,269$, $v\,h = 0{,}163\,746$

Schritt: $h = 0{,}1$, $a_i = -0{,}1\,v\,h$

Tafel 4. Beispiel $\ddot{y} = -2\,\dot{y}$.

t	y	$v\,h$	a_i	a, a'
0,00	0	0,200 000	− 0,020 000	− 0,018 733
05		180 000	− 18 000	− 17 520
05		182 000	− 18 200	
10		163 600	− 16 360	
0,10	0,181 267	0,163 747		

2. Beispiel: $\ddot{y} = -y$ Strenge Lösung: $y = \cos t$

$y_0 = 0$, $v_0 = 0$ $t = 0{,}2$: $y = 0{,}980\,067$, $v\,h = -0{,}039\,734$

Schritt: $h = 0{,}2$, $a_i = -0{,}02\,y$

Tafel 5. Beispiel $\ddot{y} = -y$.

t	y	$v\,h$	a_i	a, a'
0,0	1,000 000	0	− 0,020 000	− 0,019 933
1	995 000		− 19 900	− 19 801
2	980 100		− 19 602	
0,2	0,980 067	− 0,039 734		

[20]) Nyström, a. a. O.[5]), S. 26 bis 27. Vgl. auch das hierzu grundsätzlich unter 6. Gesagte.

[21]) Vgl. z. B. Willers, a. a. O.[1]), S. 310 oder auch Nyström, a. a. O.[5]), S. 27.

10. Näherungsverfahren für Differentialgleichungen 3. Ordnung. Das Runge-Kutta-Prinzip läßt sich sinngemäß auf Differentialgleichungen 3. Ordnung erweitern. Der Schrittrechnung liegt dann die nach $\dddot{y}$ abgebrochene Taylorformel

$$y_1 = y_0 + \dot{y}_0 h + \ddot{y}_0 \frac{h^2}{2} + \dddot{y}_0 \frac{h^3}{6}$$

zugrunde. Die Glieder y_0, $\dot{y}_0 = v_0$ und $\ddot{y}_0 = w_0$ sind als Anfangswerte gegeben, das Glied mit $\dddot{y}_0$ wird durch Einsetzen der Anfangswerte in die Differentialgleichung

$$\dddot{y} = f(t, y, v, w) \text{ mit } \dot{y} = v \text{ und } \ddot{y} = w \qquad (18)$$

berechnet. Für das Glied $\dddot{y}\, h^3/6$ ist eine Mittelbildung in ähnlicher Weise vorzunehmen, wie für $\dot{y}\, h$ beim Runge-Kutta-Verfahren für Differentialgleichungen 1. Ordnung oder für die α_i-Werte beim Nyström-Verfahren.

Mit Rücksicht auf eine bequeme Zahlenrechnung wird der vom Taylorglied abweichende Ausdruck

$$\beta_i = \dddot{y} \frac{h^3}{4} \qquad (19)$$

benutzt. Behält man die bewährte Schritteinteilung $t = 0, h/2, h/2, h$ bei, läßt jedoch beim Aufbau der Zwischenwerte für y, v und w zunächst noch gewisse Verallgemeinerungen offen[22]), so führt die Durchrechnung unter Voraussetzung eines Abgleichs bis zur Ordnung h^4 in y, v und w auf einen Formelsatz, welcher einer Aufspaltung der Gleichung 3. Ordnung in drei Gleichungen 1. Ordnung und Durchrechnung nach den alten Runge-Kutta-Formeln hinsichtlich Arbeitsaufwand und Genauigkeit überlegen ist. Für die beiden Mittelzeilen $t = h/2$ sind, ähnlich wie bei den Nyström-Formeln, diesmal die Werte y und $v\,h$ je in sich gleich. Hieraus und aus der einer Taylorformel angepaßten Anordnung ergibt sich eine namentlich in Sonderfällen fühlbare Arbeitsersparnis, welche den zunächst etwas verwickelteren Aufbau der Schrittrechnung wettmacht.

Der Rechnungsgang verläuft nach dem Schema Tafel 6 ähnlich dem für die Nyström-Formeln angegebenen, aus welchem die Schrittrechnung genügend klar hervorgehen dürfte, und nach den Gl. (20) und (21) für Mittelbildungen und Endrechnung. Die Berechnung der Mittelzeilen für y läßt sich bei einer ohnehin notwendigen Maschinenrechnung bequem durch Eintasten der Werte $v_0 h$, α_0 und $\beta_1/3$ und Multiplizieren mit den Faktoren 0,5, 0,25 und 0,25 ausführen; in ähnlicher Weise in der letzten Zeile $\beta_3/3$ mal 2.

Schrittrechnung:

Tafel 6. Rechnungsgang für eine Differentialgleichung 3. Ordnung.

t	y	$v\,h$	α	β_i	β
0	y_0	$v_0 h$	α_0	β_1	β
$h/2$	$y_0 + \frac{1}{2} v_0 h + \frac{1}{4}\alpha_0 + \frac{1}{12}\beta_1$	$v_0 h + \alpha_0 + \frac{1}{2}\beta_1$	$\alpha_0 + \beta_1$	β_2	β'
$h/2$	” ” ” ”	” ” ”	$\alpha_0 + \beta_2$	β_3	β''
h	$y_0 + v_0 h + \alpha_0 + \frac{2}{3}\beta_3$	$v_0 h + 2\alpha_0 + 2\beta_3$	$\alpha_0 + 2\beta_3$	β_4	
h	y_1	$v_1 h$	α_1		

[22]) Der Rechnung der beiden Mittelzeilen des Schemas Tafel 6 liegt folgender allgemeiner Ansatz zugrunde:

Zeile II: $y = y_0 + \frac{1}{2} v_0 h + \frac{1}{4}\alpha_0 + \frac{1}{12}\beta_1$

$v\,h = v_0 h + \alpha_0 + \frac{1}{2}\beta_1$

$\alpha = \alpha_0 + \beta_1$

Zeile III: $y = y_0 + \frac{1}{2} v_0 h + \frac{1}{4}\alpha_0 + \frac{1}{12}[(\lambda - \mu)\beta_1 + \mu\beta_2]$

$v\,h = v_0 h + \alpha_0 + \frac{1}{2}[(\sigma - \tau)\beta_1 + \tau\beta_2]$

$\alpha = \alpha_0 + [(\xi - \omega)\beta_1 + \omega\beta_2]$.

Nach der vereinfachenden Annahme $\xi = 1$ ergeben sich die unbestimmten Größen λ, μ, σ, τ, ω in eindeutiger Weise aus den gestellten Genauigkeitsforderungen für y, v und w.

Mittelbildung[23]):

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{3}\left(\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_3\right) \\ \beta' &= \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \\ \beta'' &= \frac{1}{3}(\beta_2 + \beta_3 + \beta_4) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (20).$$

Endrechnung:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_0 + v_0 h + \alpha_0 + \beta \\ v_1 h &= v_0 h + 2\alpha_0 + 2\beta' \\ \alpha_1 &= \alpha_0 + \beta' + \beta'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (21).$$

Für die Sonderfälle, in denen die Differentialgleichung unabhängig ist von y oder $\dot y$, brauchen die Zwischenwerte für y bzw. $v\,h$ nicht berechnet und im Schema mitgeführt zu werden (1. Beispiel).

Für den Sonderfall fehlender Abhängigkeit von $\dot y$ verkürzt sich das Schema ähnlich wie beim Nyström-Verfahren auf nur drei Zeilen. Der Vorteil gegenüber der alten Runge-Kutta-Rechnung ist hier besonders augenfällig. Die Rechnung verläuft wie folgt:

Schrittrechnung:

Tafel 7. Rechnungsgang für $\ddot y = f(t, y, \dot y)$.

t	y	$v\,h$	α	β_i	β
0	y_0	$v_0 h$	α_0	β_1	β
$h/2$	$y_0 + \frac{1}{2} v_0 h + \frac{1}{4}\alpha_0 + \frac{1}{12}\beta_1$	$v_0 h + \alpha_0 + \frac{1}{2}\beta_1$		β_2	β'
h	$y_0 + v_0 h + \alpha_0 + \frac{2}{3}\beta_2$	$v_0 h + 2\alpha_0 + 2\beta_2$		β_3	β''
h	y_1	$v_1 h$	α_1		

Mittelbildung:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2) \\ \beta' &= \frac{1}{3}(\beta_1 + 2\beta_2) \\ \beta'' &= \frac{1}{3}(\beta_3 + 2\beta_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (20\text{a}).$$

Endrechnung wie oben nach Gl. (21).

Zur Erläuterung folgen zwei einfache Beispiele:

1. Beispiel: $\ddot y = -2t\dot y^2$

$y_0 = v_0 = 0$
$w_0 = 1$

Schritt: $h = 0{,}2$
$\beta_i = -10\,t\,\alpha^2$

Strenge Lösung:

$$y = t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1 + t^2)$$

$t = 0{,}2$ $\quad y = 0{,}019\,8688$
$v\,h = 0{,}039\,4791$
$\alpha = 0{,}019\,2308$

Tafel 8. Beispiel $\ddot y = -2t\dot y^2$.

t	y	$v\,h$	α	$\beta_i = -10\,t\,\alpha^2$	β
0,0	0	0	0,020 0000	0	− 1307
1			20 0000	− 0,000 4000	− 2614
1			19 6000	3842	− 5080
2			19 2317	7397	
0,2	0,019 8693	0,039 4772	0,019 2307		

[23]) Mit einer Mittelbildung $\beta = 1/30 \cdot (9\beta_1 + 6\beta_2 + 6\beta_3 - \beta_4)$ wird für y sogar ein vollständiger Abgleich des Gliedes mit h^5 erzielt. Hier ist die zahlenmäßig bequemere Mittelbildung nach (20) vorgezogen, die sich der genauen Formel gut anpaßt.

2. Beispiel: $\dddot{y} = y$ Strenge Lösung: $y = e^t$

$y_0 = v_0 = w_0 = 1$

Schritt: $h = 0{,}2$

$\beta_i = 0{,}002\, y$

$t = 0{,}2$ $y = 1{,}221\,4028$

$v\,h = 0{,}244\,2806$

$a = 0{,}024\,4281$

Tafel 9. Beispiel $\dddot{y} = y$.

t	y	$v\,h$	a	$\beta_i = 0{,}002\,y$	β
0,0	1,000 0000	0,200 0000	0,020 0000	0,002 0000	1 4034
1	1,105 1667			2 2103	2 1402
2	1,221 4735			2 4429	2 2878
0,2	1,221 4034	0,244 2804	0,024 4280		

Zum Vergleich der Näherung mit den genauen Taylorwerten für y, $v\,h$ und a zeigt Tafel 10 die Faktoren der einzelnen Differentialausdrücke in den Gliedern mit h^5 und h^6, bezogen auf den genauen Wert 1, und zwar in Gegenüberstellung zum alten Runge-Kutta-Verfahren mit Aufspaltung in drei Gleichungen 1. Ordnung. Der Operator D ist, ähnlich wie unter **6**, als Kürzung für eine vollständige Differentiation nach t anzusehen, jedoch hier für Funktionen von t, y, v, w.

Tafel 10. Vergleich der Näherung mit genauen Taylorwerten 1 in den Potenzen h^5 und h^6.

h-Potenz	Faktor bei	y		$v\,h$		a	
		Neue Formel	Runge-Kutta	Neue Formel	Runge-Kutta	Neue Formel	Runge-Kutta
h^5	$D^2\mathfrak{f}$	5/4	5/4	1	1	1	1
h^5	$w\,\mathfrak{f}_y$	5/4	0	1	1	1	1
h^5	$\mathfrak{f}\,\mathfrak{f}_v$	5/4	0	1	1	1	1
h^5	$D\mathfrak{f}\,\mathfrak{f}_w$	5/4	0	1	1	1	1
h^6	$D^3\mathfrak{f}$	5/4	5/4	5/6	5/6	1	1
h^6	$3\,w\,D\mathfrak{f}_y$	5/4	0	5/6	5/6	1	1
h^6	$3\mathfrak{f}\,D\mathfrak{f}_v$	5/4	0	5/6	5/6	1	1
h^6	$3\,D\mathfrak{f}\,D\mathfrak{f}_w$	5/4	0	5/6	5/6	1	1
h^6	$\mathfrak{f}\,\mathfrak{f}_y$	5/4	0	5/6	0	1	1
h^6	$D\mathfrak{f}\,\mathfrak{f}_v$	0	0	0	0	1	1
h^6	$D^2\mathfrak{f}\,\mathfrak{f}_w$	15/8	0	5/4	5/4	1	1
h^6	$w\,\mathfrak{f}_y\,\mathfrak{f}_w$	15/8	0	5/4	0	1	1
h^6	$\mathfrak{f}\,\mathfrak{f}_v\,\mathfrak{f}_w$	15/8	0	5/4	0	1	1
h^6	$D\mathfrak{f}\,\mathfrak{f}_w^2$	0	0	0	0	1	1

11. Durchführung eines Beispiels. Das Verfahren von Nyström wurde zur numerischen Integration einer der Besselschen Differentialgleichung verwandten inhomogenen Gleichung angewandt, nämlich:

$$\ddot{y} + \frac{1}{t}\,\dot{y} - y = -\frac{1}{t}$$

mit den Anfangswerten $y_0 = \pi$, $\dot{y}_0 = -1$ für $t = 0$, wofür R. Müller[28]) Zahlenwerte mit Hilfe mechanischer Quadraturen berechnet hat.

Die numerische Integration erfolgt dabei zwischen Kontrollwerten (in Tafel 12 mit * versehen), welche durch Reihenentwicklung berechnet worden sind. Das Verfahren arbeitet also hier nach Art einer Interpolation. Die Genauigkeit wurde in der unter **9.** beschriebenen Weise nach Gl. (17) gesteigert. Die Fehler betragen bis zu zwei Einheiten der letzten in Tafel 12 angegebenen Stelle.

[28]) Reinhard Müller: Zahlenmäßige Beherrschung und Anwendung Besselscher und verwandter Funktionen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 36 bis 54. — Das Beispiel wurde auf Anregung von Herrn Professor Dr. C. Schmieden, Darmstadt, durchgeführt.

Tafel 11. Anordnung der Rechnung.

t	y	$v\,h$	a_i	$a,\ a'$
1,00	0,8730 8424	— 0,0468 4508	0,0017 0768	16 6229
05	8500 8862	451 3740	16 3794	16 1775
05	„	452 0714	16 4126	
10	8278 8042	435 6256	15 7406	
1,10	0,8279 0145	— 0,0435 6504	0,0015 7428	15 3263
15	8065 1250	419 9076	15 1042	14 9177
15	„	420 5462	15 1320	
20	7858 4961	405 3864	14 5169	
1,20	0,7858 6904	— 0,0405 4064		

Tafel 12. Ergebnisse für das Beispiel $\ddot{y}+\frac{1}{t}\,\dot{y}-y=-\frac{1}{t}$.

t	y	$-v$	t	y	$-v$
0,0	1,5707 9633	1,0000 0000	4,0	* 0,2684 0472	* 0,0729 353
1	* 4746 1462	* 0,9246 9752	2	2545 193	660 678
2	* 3856 5329	* 8555 0259	4	2419 221	600 326
3	3033 279	7919 003	6	2304 584	547 152
4	* 2271 0253	* 7334 2035	8	2199 947	500 178
5	1564 873	6796 329	5,0	* 2104 1555	* 458 5690
6	0910 327	6301 447	2	2016 2096	421 610
7	1,0303 270	5845 970	4	1935 2415	388 697
8	0,9739 929	5426 613	6	1860 4963	359 303
9	9216 844	5040 374	8	1791 3158	332 981
1,0	* 0,8730 8424	* 0,4684 508	6,0	0,1727 1246	0,0309 349
1	8279 014	4356 504	2	1667 4193	288 073
2	7858 690	4054 064	4	1611 7575	268 868
3	7467 419	3775 087	6	1559 7504	251 489
4	7102 955	3517 646	8	1511 0546	235 721
5	6763 231	3279 984	7.0	1465 3670	221 379
6	6446 352	3060 488	2	1422 4185	208 303
7	6150 577	2857 682	4	1381 9710	196 351
8	5874 305	2670 214	6	1343 8113	185 403
9	5616 065	2496 847	8	1307 7500	175 351
2,0	* 0,5374 5039	* 0,2336 445	8,0	0,1273 617	0,0166 102
2	4936 545	2050 468	2	1241 261	157 574
4	4551 621	1804 965	4	1210 548	149 693
6	4212 272	1593 782	6	1181 345	142 398
8	3912 167	1411 740	8	1153 551	135 631
3,0	3645 926	1254 477	9,0	1127 061	129 342
2	3408 971	1118 315	2	1101 784	123 489
4	3197 401	1000 149	4	1077 639	118 036
6	3007 887	897 358	6	1054 548	112 932
8	2837 582	807 721	8	1032 444	108 162
			10,0	* 0,1011 2644	* 0,0103 6927

12. Zusammenfassung. Nach einer kurzen Darstellung des Verfahrens von Blaeß zur angenäherten Lösung von Differentialgleichungen 2. Ordnung werden einige die (Grob-) Korrektur des Verfahrens betreffende Fragen auf dem Wege von Taylorentwicklungen untersucht. Über den erreichbaren Grad der Übereinstimmung mit einer Taylorreihe lassen sich bestimmte Aussagen machen.

Zu der von Nyström herrührenden Übertragung des Runge-Kutta-Verfahrens auf Differentialgleichungen 2. Ordnung wird, aufbauend auf der Blaeßschen Rechnungsform, eine handliche Fassung angegeben, der sich auch Sonderfälle leicht einfügen.

Auch für Differentialgleichungen 3. Ordnung lassen sich auf der Grundlage des Runge-Kutta-Prinzips Formelsätze herleiten, welche eine unmittelbare Behandlung dieser Gleichungen gestatten. Gegenüber dem Aufspalten in drei Differentialgleichungen 1. Ordnung ergeben sich, namentlich in Sonderfällen, gewisse Vereinfachungen.

Die Anwendung der Rechenverfahren wird durch einige Beispiele erläutert. 132

KLEINE MITTEILUNGEN

Zur Umwandlung von rotationssymmetrischen Problemen in zweidimensionale und umgekehrt. Auf eine Halbebene $y<0$ wirke die rotationssymmetrische Belastung $p_1(r)$.

Beispiel: (Bild 1) $p_1(r)=c$ für $r<a$, $p_1(r)=0$ für $r>a$.

Wir bilden hieraus einen zweidimensionalen Belastungsfall durch einen Translationsprozeß T, indem die Belastung in z-Richtung verschoben und auf die Länge 2 verteilt wird. Die neue Belastung wird:

$$p_2(x)=T\,p_1(r)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} p_1\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)d\,z\,.$$

Für das Beispiel wird $p_2=c\sqrt{a^2-x^2}$ für $|x|<a$ und $p_2=0$ für $|x|>a$ (Bild 2).

Nun vollführen wir die Operation D, die in folgendem besteht: Wir nehmen p_2 als Randwerte einer analytischen Funktion der Halbebene $y\leqq 0$, die für $|x+i\,y|\to\infty$ verschwindet, und differentieren sie am Rande $y=0$ nach y. Die so erhaltene Funktion ist:

$$p_3(x)=$$

$$D\,p_2(x)=\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\pi}\Re\int_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} p_2(\xi)\,(x+i\,y-\xi)^{-1}\,d\,\xi\right]_{y=0}$$

$$=\frac{1}{\pi}\Re\int_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} p_1(\xi)\,(x-\xi)^{-2}\,d\,\xi\,.$$

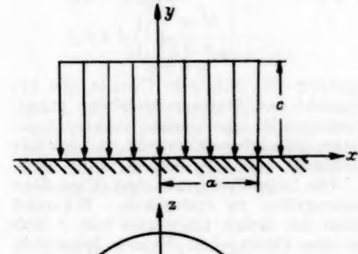


Bild 1. (links oben)

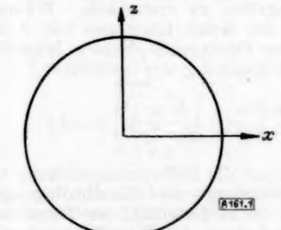


Bild 2. (links unten)

Bild 3. (rechts unten)

Für unser Beispiel wird die analytische Funktion

$$c\,\Re\left(\sqrt{a^2-(x+i\,y)^2}-i\,(x+i\,y)\right).$$

Die Ableitung nach y wird $c\,\Re\left(\dfrac{-i\,(x+i\,y)}{\sqrt{a^2\,(x+i\,y)^2}}+1\right)$.

Am oberen Rande der Halbebene erhält man (Bild 3)

$$p_3(x)=c\,\Re\left(1-\frac{i\,|x|}{\sqrt{a^2-x^2}}\right),$$

$p_3(x)=c$ für $|x|<a$ und $p_3(x)=c\left(1-\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-a^2}}\right)$ für $|x|>a$.

Durch einen Rotationsprozeß R bilden wir aus dem zweidimensionalen Belastungsfall $p_3(x)$ einen rotationssymmetrischen $p_4(r)$. Der Prozeß besteht darin, daß man den Belastungsfall p_3 um die y-Achse um den Winkel φ dreht und jeweils den Teil $p_3\dfrac{d\,\varphi}{\pi}$ wirken läßt. Im Grunde genommen bilden wir für jede Kreislinie mit dem Halbmesser r um die y-Achse den Mittelwert von $p_3(x)$.

$$p_4(r)=R\,p_3(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} p_3(r\cos\varphi)\,d\,\varphi\,.$$

Für unser Beispiel erhält man

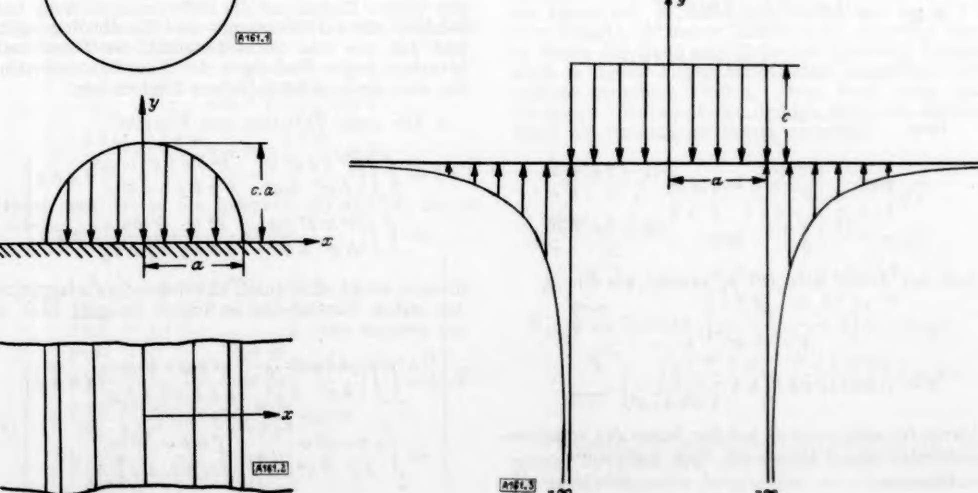
$p_4(r)=c$ für $r<a$ und $p_4(r)=0$ für $r>a$.

Wir haben die Ausgangsfunktion $p_1(r)$ zurückerhalten. Es folgt für das Beispiel:

$$p_4(r)=R\,D\,T\,p_1(r)=p_1(r).$$

Dieses gilt aber auch für jede andere rotationssymmetrische Belastung $p_1(r)$, die als Überlagerung endlich- oder unendlichvieler als Beispiel behandelter Belastungsfälle gebildet werden kann.

Diese Prozesse lassen sich mit allen Größen vornehmen, die sich wie Skalare überlagern, also für die Verschiebungen v in Richtung der Rotationsachse bei elastischen Problemen, für σ_y, ε_y, $s=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$, $e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$, $\varepsilon_x+\varepsilon_z$ bzw. $\varepsilon_r+\varepsilon_t=\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{u}{r}\equiv\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}u\,r$.



Als Anwendungsbeispiel werde gezeigt, wie die Spannungen an der Oberfläche und auf der Achse beim Belastungsfall nach Bild 1 gefunden werden können, da der Spannungszustand nach Bild 2 bekannt ist.

Für den zweidimensionalen Spannungszustand der Belastung $p_2(x)$ wird, mit

$$\varphi_2 = -c\,\Re\left(\sqrt{a^2-(x+iy)^2} - i(x+iy)\right):$$

$$\sigma_y = \varphi_2 - y\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad \sigma_x = \varphi_2 + y\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad \sigma_z = 2\mu\varphi_2,$$

$$s = 2(1+\mu)\varphi_2, \quad \varepsilon_y = \frac{1+\mu}{E}(\sigma_y - 2\mu\varphi_2),$$

$$e = \frac{1-2\mu}{E}s.$$

Für den zweidimensionalen Spannungszustand der Belastung $p_3(x)$ nach Bild 3 ist statt φ_2 zu setzen:

$$\varphi_3 = -c\,\Re\left(1 - \frac{i(x+iy)}{\sqrt{a^2-(x+iy)^2}}\right).$$

An der Oberfläche $y=0$ wird für p_3:

$$\sigma_y = \sigma_x = -p_3, \qquad s = -2(1+\mu)p_3,$$

$$\varepsilon_y = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}p_3,$$

$$e = -\frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}p_3.$$

Für den rotationssymmetrischen Fall nach Bild 1 erhält man durch den Prozeß R:

$$\sigma_y = -c \quad \text{für} \quad r<a \quad \text{bzw.} \quad 0 \quad \text{für} \quad r>a,$$

$$\varepsilon_y = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)c}{E} \quad \text{bzw.} \quad 0,$$

$$e = -\frac{2(1+\mu)(1-2\mu)c}{E} \quad \text{bzw.} \quad 0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ur = e - \varepsilon_y = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)c}{E} \quad \text{bzw.}\ 0.$$

Hieraus $u = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)c}{2E}\cdot r$ für $r<a$

bzw. $u = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)c}{2E}\cdot\frac{a^2}{r}$ für $r>a$,

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)c}{2E}$$

bzw. $+\frac{(1+\mu)(1-2\mu)c}{2E}\cdot\frac{a^2}{r^2}$,

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r} = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)c}{2E}$$

bzw. $-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)c}{2E}\cdot\frac{a^2}{r^2}$,

$$\sigma_r = -\frac{(1+2\mu)c}{2} \quad \text{bzw.} \quad +\frac{(1-2\mu)c}{2}\frac{a^2}{r^2},$$

$$\sigma_t = -\frac{(1+2\mu)c}{2} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{(1-2\mu)c}{2}\frac{a^2}{r^2}.$$

Auf der Achse wird für p_3 sowohl wie für p_4

$$\sigma_y = -c\left(1+\frac{y^3}{\sqrt{a^2+y^2}^{\,3}}\right), \text{ hierbei ist } y \leq 0$$

$$s = -2(1+\mu)c\left(1+\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}\right).$$

Damit ist auch $\sigma_r = \sigma_t$ auf der Achse des rotationssymmetrischen Falles nach Bild 1 gefunden.

Dresden. **C. Weber.** 161

Die erste Variation der Formänderungsarbeit ausgebeulter ebener Platten.

Bei Behandlung von Problemen der Plattenbiegung, Plattenschwingung und Plattenknickung geht man am besten davon aus, daß die potentielle Energie bzw. das Hamiltonsche Integral einen Extremwert haben muß. Denn aus der Variation dieser Ausdrücke folgt nicht nur die Differentialgleichung, sondern auch sämtliche Randbedingungen und bei sprungweiser Änderung der Plattendicke oder bei Einlagerung linear verteilter, mitschwingender Massen auch die Übergangsbedingungen. Sowohl in den Ausdruck für die potentielle Energie (Differenz der Formänderungsarbeit und der Arbeit der äußeren Kräfte) wie in den Integranden des Hamiltonschen Integrals (Differenz der potentiellen und der kinetischen Energie) geht die Formänderungsarbeit ein. Der Ausdruck für diese ist z. B. von Kirchhoff mittels der Hauptkrümmungen $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$ der ausgebeulten Mittelfläche der Platte, d. h. der Fläche, die vor der Deformation in der x, y-Ebene lag, gegeben:

$$A = \frac{N}{2}\iint\left\{\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho_2}\right)^2 + \frac{2\mu}{\varrho_1\varrho_2}\right\}dx\,dy,$$

wo N der Plattenfaktor, und $\mu = \frac{1}{m}$ die Querkontraktionszahl ist. Für kleine Durchbiegungen geht das, wenn man mit $w(x, y)$ Verschiebungen senkrecht zur x, y-Ebene bezeichnet, in

$$A = \frac{N}{2}\iint\left\{(\Delta w)^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\}dx\,dy$$

über. Vorausgesetzt ist, daß jede Gerade, die ursprünglich senkrecht zur Plattenmittelebene stand, durch die Deformation in eine Gerade senkrecht zur verbogenen Plattenmittelebene übergeht, und daß alle Teile der Mittelebene beim Ausbeulen keine Dehnung erfahren. Die Doppelintegrale sind dabei über das ganze Plattengebiet zu erstrecken. Während nun die Variation des ersten Integrales von A sich einfach mittels des Greenschen Satzes behandeln läßt, fordert die Behandlung des zweiten

$$J = \iint\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy,$$

das keinen Einfluß auf die Differentialgleichung hat, sondern nur auf Übergangs- und Randbedingungen, und das, wie man leicht feststellt, der Form nach invariant gegen Drehungen des Koordinatensystems ist, eine etwas umständlichere Umformung.

1. Die erste Variation von J ergibt:

$$\left.\begin{aligned}\delta J = &\iint\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\delta w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)dx\,dy\\ &+\iint\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\,\partial y}\right)dx\,dy\end{aligned}\right\}(1).$$

Hieraus erhält man durch unvollständige Integration des ersten Summanden im ersten Integral nach x, des zweiten nach y

$$\left.\begin{aligned}\delta J_1 &= \iint\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\delta w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)dx\,dy\\ &= \int_u^o \frac{\partial\,\delta w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Bigg|_l^r dy - \int_l^r \frac{\partial\,\delta w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\Bigg|_u^o dx -\end{aligned}\right\}(2),$$

da das Flächenintegral auf der rechten Seite Null wird. Beachtet man nun, daß nach Bild 1

$$dy = ds \sin\vartheta, \quad dx = ds\cos\vartheta$$

ist, so kann man dieses Integral in eine Summe von Integralen über die einzelnen Bogen des Randes von Ecke zu Ecke zerlegen, wozu man, wenn man den

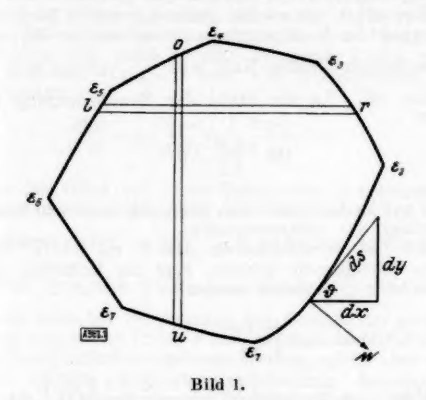


Bild 1.

Umlaufssinn im Gegenzeigersinn wählt, das Vorzeichen des zweiten Integrales umkehren muß. Es wird

$$\delta J_1 = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\varepsilon_{\nu-1}+0}^{\varepsilon_\nu - 0} \frac{\partial\,\delta w}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin\vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos\vartheta\right] ds \quad . \quad (3),$$

wo ε_ν die Bogenlänge bis zur ν-ten Ecke gemessen von einem beliebig gewählten Anfangspunkt aus ist; dabei sind die Koordinaten von ε_0 gleich denen von ε_n. In der gleichen Weise formt man das zweite Integral von (1) um.

$$\delta J_2 = -\sum_{\nu=1}^{n} \int_{\varepsilon_{\nu-1}+0}^{\varepsilon_\nu - 0} \frac{\partial\,\delta w}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos\vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\sin\vartheta\right] ds \quad . \quad (4).$$

Zur weiteren Umformung beachtet man, daß, falls n die äußere Normale ist,

$$\frac{\partial\,\delta w}{\partial x} = \frac{\partial\,\delta w}{\partial s}\cos\vartheta + \frac{\partial\,\delta w}{\partial n}\sin\vartheta;$$

$$\frac{\partial\,\delta w}{\partial y} = \frac{\partial\,\delta w}{\partial s}\sin\vartheta - \frac{\partial\,\delta w}{\partial n}\cos\vartheta.$$

Setzt man das in die Integrale (3) und (4) ein, so wird

$$\delta J = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\varepsilon_{\nu-1}+0}^{\varepsilon_\nu - 0} \left[\frac{\partial\,\delta w}{\partial s}\left\{\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cos\vartheta\sin\vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\right\} + \frac{\partial\,\delta w}{\partial n}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\vartheta + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos\vartheta\sin\vartheta\right\}\right] ds \quad (5).$$

Da nun

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial n}\sin\vartheta - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial n}\cos\vartheta$$

$$= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\sin^2\vartheta - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos^2\vartheta$$

ist, wird der Ausdruck in der zweiten geschweiften Klammer

$$\Big\{\Big\}_2 = \Delta w - \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial n} \quad . \quad . \quad (6).$$

Ähnlich findet man durch Differentiation nach s, wobei man berücksichtigen muß, daß ϑ, das ja von n unabhängig war, sich mit s ändert:

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos\vartheta\sin\vartheta - \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos\vartheta\sin\vartheta + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\vartheta\right)\frac{d\vartheta}{ds}.$$

Da es sich um Kurvenbogen ohne Ecken handelt, kann man für $\frac{d\vartheta}{ds}$ die Krümmung des Randes $\frac{1}{\varrho}$ einsetzen, ferner ist

$$\frac{\partial w}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\vartheta = \frac{\partial w}{\partial s},$$

so daß also die erste Klammer des Integrales (5) wird

$$\Big\{\Big\}_1 = -\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Setzt man (6) und (7) in (5) ein, erhält man

$$\delta J = \sum_{\nu=1}^{n}\left[\int_{\varepsilon_{\nu-1}+0}^{\varepsilon_\nu-0} \frac{\partial\,\delta w}{\partial s}\left\{-\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s}\right\} ds + \int_{\varepsilon_{\nu-1}+0}^{\varepsilon_\nu-0} \frac{\partial\,\delta w}{\partial n}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial n}\right\}\right] ds.$$

Das erste dieser beiden Integrale wird nochmal durch unvollständige Integration umgeformt. Dabei sei angenommen, daß in m Punkten σ_ν des Randes Einzelkräfte P_{σ_ν} senkrecht zur Plattte wirken. Der einfacheren Schreibweise wegen sollen jetzt auch die Ecken mit σ_ν bezeichnet werden und die $m+n = r$ Punkte, in denen Einzelkräfte angreifen bzw. in denen der Rand eine Ecke hat (natürlich können auch in diesen Ecken Einzelkräfte angreifen), fortlaufend numeriert werden. Dann wird, wenn man im ersten Gliede auf der rechten Seite die Reihenfolge der Summanden etwas umordnet:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{\varepsilon_{\nu-1}+0}^{\varepsilon_\nu-0} \frac{\partial\,\delta w}{\partial s}\left\{-\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s}\right\} ds$$

$$= \sum_{\nu=1}^{r} \delta w_{\sigma_\nu}\left[-\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s}\right]_{\sigma_\nu - 0}^{\sigma_\nu + 0}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{r} \int_{\sigma_{\nu-1}+0}^{\sigma_\nu - 0}\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2}\frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right]\delta w\, ds.$$

Setzt man jetzt wieder statt der Summen von Integralen Integrale über den ganzen Rand, indem man Unstetigkeiten des Integranden an einer endlichen

Anzahl von Punkten zuläßt, erhält man als Endresultat

$$\left.\begin{aligned} \delta J = & \sum_{\nu=1}^{r} \delta w_{\sigma_\nu} \left[\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial n} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s}\right]_{\sigma_\nu - 0}^{\sigma_\nu + 0} \\ & + \oint \delta w \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right) d s \\ & + \oint \frac{\partial \delta w}{\partial n}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial n}\right) d s \end{aligned}\right\} \quad (8).$$

2. Plattenbiegung.

Die potentielle Energie, die ja gleich der Differenz aus Formänderungsarbeit und Arbeit der äußeren Kräfte ist, läßt sich für die Plattenbiegung, wenn außer den oben erwähnten Einzelkräften am Rande noch eine Flächenbelastung $p(x, y)$ und eine kontinuierlich verteilte Randkraft $P(s)$, beide positiv in Richtung positiver w und außerdem ein Randmoment $M(s)$, das das gleiche Vorzeichen wie $\frac{\partial w}{\partial n}$ hat, an der Platte angreifen, schreiben:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{N}{2}\iint (\Delta w)^2 \, d x \, d y \\ & - N(1-\mu)\iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w^2}{\partial x \, \partial y}\right) d x \, d y \\ & - \iint p(x, y)\, w \, d x \, d y - \oint M(s)\frac{\partial w}{\partial n} d s \\ & - \oint P(s)\, w(s)\, d s - \sum_{\nu=1}^{r} P_{\sigma_\nu} w_{\sigma_\nu}. \end{aligned}$$

Bildet man die erste Variation dieses Ausdruckes, wobei angenommen sei, daß der Rand so beschaffen ist, daß man für die Umformung der Variation des ersten Integrales die Greensche Formel benutzen kann, so wird

$$\left.\begin{aligned} \delta \Pi = & N\left\{\iint \delta w \, \Delta\Delta w \, d x \, d y \right. \\ & \left. + \oint \Delta w \frac{\partial \delta w}{\partial n} d s - \oint \delta w \frac{\partial \Delta w}{\partial n} d s\right\} \\ & - N(1-\mu)\left\{\sum_{\nu=0}^{r} \delta w_\sigma \left[\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial n} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s}\right]_{\sigma_\nu - 0}^{\sigma_\nu + 0} \right. \\ & + \oint \delta w \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right) d s \\ & \left. + \oint \frac{\partial \delta w}{\partial n}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial n}\right) d s\right\} \\ & - \iint \delta w \, p(x, y)\, d x \, d y - \oint M(s)\frac{\partial \delta w}{\partial n} d s \\ & - \oint P(s)\, \delta w \, d s - \sum_{\nu=1}^{r} P_{\sigma_\nu} \delta w_{\sigma_\nu} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (9).$$

Soll diese Gleichung erfüllt sein, muß, da δw innerhalb der Begrenzung der Platte beliebig sein kann,

$$N \Delta \Delta w - p(x, y) = 0$$

sein. Damit hat man die Differentialgleichung der Plattenbiegung, in die nichts von dem Integral J eingeht. Das Nullsetzen der anderen Glieder gibt die Randbedingungen. Bei frei drehbarem Rand, wo also $\frac{\partial \delta w}{\partial n}$ ganz beliebig genommen werden kann, muß, wenn (9) erfüllt sein soll,

$$\text{I a:} \quad M(s) = N\left\{\Delta w - (1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial n}\right)\right\}.$$

Hier rührt der zweite Summand von J her. Ist dagegen der Rand eingespannt, so werden die entsprechenden Glieder Null, weil $\frac{\partial \delta w}{\partial n}$ gleich Null zu setzen ist. An die Stelle der Randbedingung I a tritt

$$\text{I b:} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

und aus I a berechnet sich dann, wie man sich leicht überlegt, das Auflagermoment.

Bei frei verschiebbarem Rand, wo $\delta w(s)$ und δw_σ beliebig sein können, muß zur Erfüllung der Gleichung (9) gesetzt werden

$$\begin{aligned} & P(s) = -N\left\{\frac{\partial \Delta w}{\partial n}\right. \\ \text{II a:} \quad & \left. + (1-\mu)\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2}\frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right]\right\} \\ & P_{\sigma_\nu} = -N(1-\mu)\left[\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial n} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s}\right]_{\sigma_\nu - 0}^{\sigma_\nu + 0}. \end{aligned}$$

Hier kommt in der ersten Gleichung der zweite Summand rechts von J her, während die zweite Gleichung überhaupt nur von J herrührt. Ist die Platte drehbar gelagert, so wird $\delta w(s) = 0$ und $\delta w_\sigma = 0$, an Stelle von II a tritt

$$\text{II b} \quad w(s) = 0 \quad \text{und} \quad w_\sigma = 0$$

und aus II a berechnen sich die Auflagerreaktionen. Natürlich werden jetzt im allgemeinen keine Einzelkräfte auftreten, da in diesem Falle der Wert der eckigen Klammer für $\sigma + 0$ und $\sigma - 0$ der gleiche sein wird. Eine Ausnahme machen nur die Ecken. Hier werden Einzelkräfte auftreten:

$$P_\varepsilon = \left[\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial n} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s}\right]_{\varepsilon - 0}^{\varepsilon + 0},$$

oder, wenn das nicht der Fall sein kann, ist durch das Nullsetzen der rechten Seite eine Bedingung für w in dieser Ecke gegeben. Diese sog. Eckenrelation rührt also nur von J her.

Im Fall der Plattenschwingung, auf den hier nicht weiter eingegangen werden soll, hat man, falls keine mitschwingenden Einzelmassen vorhanden sind, die gleichen Randbedingungen, wie bei der Plattenbiegung. Nur in der Differentialgleichung tritt noch ein weiteres Glied mit der zweiten Ableitung von w nach der Zeit auf.

3. Plattenknickung.

Die potentielle Energie ist jetzt durch die sog. Bryansche Formel gegeben:

$$\begin{aligned} & \frac{N}{2}\iint \left[(\Delta w)^2 - 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w^2}{\partial x \, \partial y}\right)\right] d x \, d y \\ & - \iint \left[\frac{P_x}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{P_y}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + T\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right] d x \, d y, \end{aligned}$$

wo P_x und P_y die in der Plattenmittelebene auf die Längeneinheit wirkenden Normaldrucke in der x- bzw. der y-Richtung sind, und wo T die Schubspannung pro Längeneinheit ist. Die Variation dieses Integrales soll hier nicht hingeschrieben

werden. Es soll nur kurz der Einfluß von J auf die Beullast betrachtet werden. Diese bestimmt sich bekanntlich durch Nullsetzen einer Determinante, die sich aus den Randbedingungen ergibt. Bei eingespannter Platte ist am Rande $w = 0$ und $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$. Auf diese Werte hat J keinen Einfluß, kann also bei der Bestimmung der Beullast bei beliebiger Berandung fortgelassen werden, nicht natürlich, wenn man die Auflagerreaktionen der ausgebeulten Platte berechnen will. Bei drehbar gelagerter Platte muß $w = 0$ und $M(s) = 0$ sein, also ausführlicher geschrieben

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial n}\right) = 0,$$

wo das Glied mit μ als Faktor von J herstammt. Ist nun die Begrenzung aus Geradenstücken zusammengesetzt, so ist $\frac{1}{\varrho} = 0$, außerdem ist für jede ebene gelagerte Platte am Rande $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0$. Also kann auch bei Bestimmung der Beullast der geradlinig begrenzten Platte J im Ausdruck für die Formänderungsarbeit fortgelassen werden, nicht aber bei der drehbar gelagerten, krummlinig begrenzten Platte. Während also die Beullast bei einer ebenen, beliebig geformten, eingespannten Platte und bei einer geradlinig begrenzten, drehbar gelagerten Platte von der Querkontraktionszahl μ nur insofern abhängt, als dieses in dem Plattenfaktor N enthalten ist, hängt diese Beullast bei der nicht geradlinig begrenzten, drehbar gelagerten, ebenen Platte außerdem noch explizite von μ ab. Das ist übrigens stets der Fall, wenn es sich um Platten handelt, deren Dicke veränderlich ist, etwa um abgestufte Platten, da dann J auf die Übergangsbedingungen an den Sprungstellen von Einfluß ist.
Außerdem geht aus diesen Überlegungen hervor, daß man zur Bestimmung der Beullast einer nicht geradlinig begrenzten, drehbar gelagerten Platte, diese nicht etwa ersetzen darf durch eine Platte, die durch ein passend gewähltes Polygon begrenzt ist, das sich aus Geradenstücken zusammensetzt. Das Gleiche gilt für die Berechnung der Durchbiegung krummlinig begrenzter, drehbar gelagerter ebener Platten, wie man aus der Gleichung I a des Punktes 2 erkennt. Diese Tatsachen muß man bei einem Versuch, das Differenzenverfahren auf solche Platten anzuwenden, beachten.

Dresden. Willers. 962

Bemerkungen zur graphischen Integration. Bei der graphischen Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ werden üblicherweise zwei Verfahren benutzt, die durch unmittelbare Übertragung der Formeln 2. Ordnung von Runge, Heun und Kutta[1]) ins Zeichnerische gewonnen und meist in naheliegender Weise als Tangenten- bzw. Sehnenverfahren (im folgenden TV bzw. SV) bezeichnet werden. Beim TV gelangt man vom Ausgangspunkt $P(x_0, y_0)$ mit der Schrittlänge h über den Zwischenpunkt $\bar{Z}\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hf_0\right)$ zum Punkte $Q^*(x_0 + h, y_0 + k^*)$ mit

$$k^* = \frac{1}{2}hf_0 + \frac{1}{2}hf(x_0 + h, y_0 + hf_0) \quad . \quad . \quad (1).$$

k^* ist damit der zum TV gehörige Näherungswert für den wahren Ordinatenzuwachs $\Delta y = k$ längs der Integralkurve durch P. Beim SV kommt man von P aus zum Punkte $Q^{**}(x_0 + h, y_0 + k^{**})$ mit dem Näherungswert

$$k^{**} = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hf_0\right) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

für k. Entwickelt man k^* und k^{**} nach Potenzen von h, so erhält man unter Benutzung des Operators $D = \frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}$

$$k^* = hf_0 + \frac{1}{2}h^2 Df_0 + \frac{1}{4}h^3 D^2 f_0 + \cdots \quad . \quad . \quad (3)$$

und

$$k^{**} = hf_0 + \frac{1}{2}h^2 Df_0 + \frac{1}{8}h^3 D^2 f_0 + \cdots \quad . \quad . \quad (4).$$

Da die Entwicklung des genauen Ordinatenzuwachses k

$$\left.\begin{aligned} k &= hf_0 + \frac{1}{2}h^2 Df_0 + \frac{1}{6}h^3 (D^2 f + f_y Df)_0 + \cdots \\ &= hy_0' + \frac{1}{2!}h^2 y_0'' + \frac{1}{3!}h^3 y_0''' + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

lautet, erkennt man, daß k^* und k^{**} bis auf einen Fehler $0(h^3)$ mit k übereinstimmen.

In der Vermutung, daß dadurch die Genauigkeit erhöht werden kann, ist nun in einer früheren Arbeit[2]) beiläufig vorgeschlagen worden, das TV in der folgenden Weise durch eine anschließende Iteration zu ergänzen. Man faßt das TV als ihren ersten Schritt auf und geht dann in der Weise weiter, daß man auf der y-Parallelen $(x_0 + h)$ durch ein von $\bar{Z}$ ausgehendes Strahlenbüschel eine Folge von Punkten $\bar{Q}_1 = Q^*, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3, \ldots, \bar{Q}_n, \ldots$ derart erzeugt, daß jeweils $\bar{Z}\bar{Q}_n$ die dem Punkte $\bar{Q}_{n-1}$ im Richtungsfeld der Differentialgleichung zugeordnete Richtung besitzt. Sind $x_0 + h$, $y_0 + \bar{k}_n$ die Koordinaten von $\bar{Q}_n$, so ist also

$$\bar{k}_1 = k^*, \; \bar{k}_n = \frac{1}{2}hf_0 + \frac{1}{2}hf(x_0 + h, y_0 + \bar{k}_{n-1}) \; (6).$$

Nach den bekannten Sätzen über die Lösung einer Gleichung $x = \varphi(x)$ durch die Iteration $x_n = \varphi(x_{n-1})$ konvergiert dieses Verfahren gegen die Lösung $\bar{k}$ der Gleichung

$$\bar{k} = \frac{1}{2}hf_0 + \frac{1}{2}hf(x_0 + h, y_0 + \bar{k}) \quad . \quad . \quad (7),$$

wenn nur in der ganzen in Frage kommenden Umgebung von $\bar{Q}(x_0 + h, y_0 + \bar{k})$

$$\frac{1}{2}\left|h\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqq q < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ist. Das bedeutet aber im wesentlichen die geläufige und im allgemeinen als erfüllt anzusehende Forderung nach der Beschränktheit von $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$.

Wie nachträglich festgestellt werden konnte, findet sich der Vorschlag desselben Iterationsverfahrens bereits in einer kurzen Bemerkung bei Willers[3]), und zwar mit den Worten: „Noch ge-

[1]) Vgl. z. B. G. Schulz: Formelsammlung zur praktischen Mathematik. Berlin 1937, S. 111f.

[2]) H. Heinrich: Die graphische Integration von Differentialgleichungen . . . mit nomographischen Hilfsmitteln. Mitt. techn. Inst. Staatl. Tung-Chi-Univ., Woosung (China), Bd. II, Heft 1, S. 9.

[3]) Fr. A. Willers: Methoden der praktischen Analysis. Berlin 1928, S. 306.

nauer wird die Näherungskurve . . ." Da hier jedoch ebenso wie in der oben angeführten Arbeit [2]) auf Genauigkeitsbetrachtungen verzichtet worden ist, das Verfahren aber offenbar, wie sich gezeigt hat, sehr naheliegt, dürfte es von Wert sein, die entsprechenden Untersuchungen im folgenden kurz nachzuholen und durch einige Bemerkungen zu ergänzen.

Zunächst ergibt sich für $\bar{k}$, das ja im gegebenen Falle von h abhängt, aus (7) die Potenzreihenentwicklung

$$\left.\begin{aligned}\bar{k} &= h f_0 + \frac{1}{2} h^2 D f_0 + \frac{1}{4} h^3 (D^2 f + f_y D f)_0 + \cdots \\ &= h y_0' + \frac{1}{2} h^2 y_0'' + \frac{1}{4} h^3 y_0''' + \cdots\end{aligned}\right\} \quad (9),$$

und es zeigt sich, daß auch $\bar{k}$ nur bis auf einen Fehler $0\,(h^3)$ mit k übereinstimmt. Wollte man daher von einer verbesserten Genauigkeit gegenüber dem TV oder dem SV sprechen, so könnte dies nur mit dem Hinweis darauf geschehen, daß sich die Entwicklung von $\bar{k}$ infolge der Berücksichtigung des Gliedes $f_y D f$ im h^3-Glied offensichtlich in engerer Weise an die Entwicklung von k anpaßt als die von k^* und k^{**}. Die Anwendung des geschilderten iterativen Verfahrens wird sich daher nach allem nur dann lohnen, wenn sich für jeden beliebigen Punkt die Feldrichtung einfach und genau genug bestimmen läßt. Ich kann, was diesen Punkt betrifft, auf meine Ausführungen a. a. O.[2]) und in einer späteren Arbeit [4]) verweisen.

Folgendes mag noch bemerkt werden. Die Berücksichtigung von $f_y D f$ im h^3-Glied von $\bar{k}$ ermöglicht es, sofort eine einfache lineare Verbindung von $\bar{k}, k^*, k^{**}$ anzugeben, deren Entwicklung nach Potenzen von h bis auf einen Fehler $0\,(h^4)$ mit k übereinstimmt, nämlich

$$k' = \frac{2}{3}\left(\bar{k} - \frac{1}{2} k^* + k^{**}\right) \quad . \; . \; . \quad (10).$$

Oder man verbindet den zu dem iterativen Näherungswert $\bar{k}$ gehörigen Punkt $\bar{Q}$ mit P und geht von P aus in der zum Mittelpunkt M von $P\bar{Q}$ zugeordneten Richtung bis zum Schnittpunkt Q^{***} mit der y-Parallelen $(x_0 + h)$ vor. Dann ist das zugehörige

$$\left.\begin{aligned}k^{***} &= h f\left(x_0 + \frac{1}{2} h, y_0 + \frac{1}{2} \bar{k}\right) \\ &= h f_0 + \frac{1}{2} h^2 D f_0 \\ &\quad + \frac{1}{8} h^3 (D^2 f + 2 f_y D f)_0 + \cdots\end{aligned}\right\} \quad . \quad (11)$$

und

$$k'' = \frac{1}{3}(\bar{k} + k^{**} + k^{***}) \quad . \; . \; . \; . \quad (12)$$

unterscheidet sich in der h-Entwicklung ebenfalls erst im h^4-Glied von h. In beiden Fällen muß jedoch dahingestellt bleiben, ob die dabei notwendigen Konstruktionen einfach genug sind, um in der Praxis der graphischen Integration noch verwendbar zu sein.

Man kann an das Iterationsverfahren noch von einem etwas anderen Gesichtspunkt herangehen. Wir stellen dazu folgende Überlegungen an. $Q\,(x_0 + h,\, y_0 + k)$ sei wie bisher der Punkt bei $x_0 + h$, der genau auf der durch P gehenden Integralkurve $\mathfrak{J}$ liegt. Die in P und Q an $\mathfrak{J}$ gelegten Tangenten mögen sich in $Z\,(x_0 + \vartheta\, h, \eta)$ schneiden. (Dabei können wir ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $0 < \vartheta < 1$, d. h. daß Z „Zwischen"-Punkt ist. Das ist sicher immer dann der Fall, wenn die Krümmung von $\mathfrak{J}$ auf dem Weg von P nach Q ihr Vorzeichen nicht wechselt. Durch eine geeignete Schritteinteilung wird sich das stets erreichen lassen.) Für k ergibt sich dann die Gleichung

$$k = \vartheta\, h f_0 + (1 - \vartheta)\, h f(x_0 + h, y_0 + k) \quad (13).$$

Setzt man zu ihrer Lösung die Iteration

$$k_n = \vartheta\, h f_0 + (1 - \vartheta)\, h f(x_0 + h, y_0 + k_{n-1}) \; . \quad (14)$$

an, so entspricht das sich daraus ergebende graphische Verfahren genau dem oben angegebenen mit dem einzigen Unterschied, daß der Ausgangspunkt der Richtstrahlen nicht $\bar{Z}$, sondern Z ist. Die Konvergenz ist gesichert, sobald in der ganzen in Frage kommenden Umgebung von Q

$$\left|(1 - \vartheta)\, h \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y)\right| \leqq q < 1 \quad . \; . \quad (15)$$

ist, was im wesentlichen wieder auf die Beschränktheit von $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ hinauskommt. Wenn es daher ein — vielleicht auch iteratives — Verfahren gäbe, um den im allgemeinen nicht bekannten Zwischenpunkt Z zu bestimmen, so könnte man von ihm aus durch das angegebene Iterationsverfahren genau zu dem gesuchten Punkt Q der Integralkurve gelangen. Solange jedoch Z nicht bekannt oder bestimmbar ist, ist man wieder auf Näherungen angewiesen. Aus (13) ergibt sich

$$\vartheta = \frac{h f(x_0 + h,\, y_0 + k) - k}{h\,[f(x_0 + h,\, y_0 + k) - f_0]} \quad . \; . \; . \quad (16).$$

ϑ ist mit k eine Funktion von h, für die wir die Reihe

$$\vartheta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} h^{n-1} \quad . \; . \; . \; . \quad (17)$$

ansetzen können. Ist in etwas allgemeinerer Form als in (5)

$$\left.\begin{aligned}k &= h y_0' + \frac{1}{\varkappa!} h^{\varkappa} y_0^{(\varkappa)} \\ &\quad + \frac{1}{(\varkappa+1)!} h^{\varkappa+1} y_0^{(\varkappa+1)} + \cdots\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (18),$$

wobei $y_0^{(\varkappa)}$ die Ableitung niedrigster Ordnung $\geqq 2$ ist, die an der Stelle (x_0, y_0) nicht verschwindet, so erhält man aus (16) nach einiger Zwischenrechnung die für alle $n \geqq 0$ gültige Formel

$$y_0^{(\varkappa+n)} + \sum_{\lambda=1}^{n+1} \binom{\varkappa + n}{\lambda} \beta_\lambda\, y_0^{(\varkappa+n+1-\lambda)} = 0 \quad . \quad (19).$$

Sie liefert für $n = 0$ und $n = 1$

$$\beta_1 = -\frac{1}{\varkappa}, \quad \beta_2 = \frac{2}{\varkappa^2(\varkappa+1)} \frac{y_0^{(\varkappa+1)}}{y_0^{(\varkappa)}} + \cdots \quad (19{,}1)$$

und daraus rekursiv $\beta_3, \beta_4, \ldots$ Die Reihenentwicklung von ϑ beginnt daher mit

$$\vartheta\,(h) = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} + \frac{h}{\varkappa^2(\varkappa+1)} \frac{y_0^{(\varkappa+1)}}{y_0^{(\varkappa)}} + \cdots \quad . \quad (20).$$

Für den weitaus wichtigsten Fall, daß bereits $y_0'' \neq 0$ ist $(\varkappa = 2)$, ergibt sich

$$\vartheta\,(h) = \frac{1}{2} + \frac{h}{12} \frac{y_0'''}{y_0''} + \cdots \quad . \; . \; . \; . \quad (20{,}1)$$

[4]) H. Heinrich: Ein abbildungsgeometrisches Verfahren zur Darstellung von Richtungsfeldern . . . Dt. Math. Bd. 3 (1938), S. 353 bis 389.

und, wenn P ein „gewöhnlicher" Wendepunkt der Integralkurve mit $y_0''=0$, $y_0'''\neq 0\ (\varkappa=3)$ ist,

$$\vartheta(h)=\frac{2}{3}+\frac{h}{36}\frac{y_0^{(4)}}{y_0'''}+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20,2).$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß das Arbeiten mit einem Zwischenpunkt, dessen ϑ mit einem Fehler $0(h^\nu)$ behaftet ist, im Ordinatenzuwachs k einen Fehler $0(h^{\nu+\varkappa})$ nach sich zieht. Im Fall $\varkappa=2$ müßte man daher, um den Fehler in k wenigstens auf $0(h^4)$ zu drücken, einen ϑ-Wert benutzen, dessen h-Entwicklung sich frühestens im h^2-Glied von (20,2) unterscheidet. Konstruktionen für solche Zwischenpunkte lassen sich zwar angeben, doch kann hier auf ihre Wiedergabe verzichtet werden, da sie nicht einfach genug erscheinen, um für die praktische Verwendung empfohlen werden zu können. Anschaulich gewinnt man ein Maß für das in (20,1) wesentliche Glied $\frac{h}{12}\frac{y_0'''}{y_0''}$, wenn man den engen Zusammenhang zwischen y'' und der Krümmung der Kurve und die Beziehung $\frac{y'''}{y''}=\frac{d\ln|y''|}{dx}$ beachtet. Man kann auch davon ausgehen, daß der genaue Wert von ϑ für die Integralkurve übereinstimmt mit dem entsprechenden für die eindeutig bestimmte Parabel 3. Ordnung, die durch P und Q hindurchgeht und dort mit der Integralkurve gemeinsame Tangenten besitzt. Ersetzt man diese Parabel näherungsweise durch diejenige, die durch P geht und dort mit der Integralkurve gemeinsame Ableitungen bis zur 3. Ordnung einschl. hat, und führt die entsprechende Rechnung durch, so erhält man als Näherungswert für ϑ den Ausdruck

$$\frac{1}{2}+\frac{h}{12}\frac{y_0'''}{y_0''+\frac{1}{2}h y_0'''},$$

dessen Entwicklung nach Potenzen von h ebenfalls mit $\frac{1}{2}+\frac{h}{12}\frac{y_0'''}{y_0''}+\cdots$ beginnt.

Wichtig — weil in den bisherigen Darstellungen m. E. nicht genügend hervorgehoben — scheint mir ein besonderer Hinweis darauf zu sein, daß im Fall $\varkappa=3$, in dem P Wendepunkt der Integralkurve ist, mit dem Näherungswert $\frac{2}{3}$ für ϑ gearbeitet werden muß und daß man dann — auch schon beim TV — sofort eine Übereinstimmung in k bis zum h^3-Glied bekommt.

Schließlich mag noch darauf aufmerksam gemacht werden, daß sich das Iterationsverfahren in der gleichen Weise wie bisher auch dann noch durchführen läßt, wenn die Unterteilung des Richtungsfeldes nicht durch y-Parallelen, sondern durch irgendeine andere Schar sich nicht überschneidender Kurven geliefert wird, wie es z. B. bei Verwendung von Leitkurven die Isopunktalen[5]) sind. Zur Ableitung der Konvergenzbedingung kann man sich dabei mit Hilfe der vektorischen Darstellungsweise vom Koordinatensystem unabhängig machen. Die Rechnung selbst soll hier übergangen werden. Man gelangt zu folgendem Ergebnis. Sind $\mathfrak{p},\mathfrak{q},\mathfrak{z}$ die Ortsvektoren der Punkte P, Q, Z und $\mathfrak{w}$ der Einheitsvektor der Feldrichtung, so daß mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x}$ des variablen Punktes X und der Bogenlänge s der Integralkurve als Parameter die Differentialgleichung in der Form $\frac{d\mathfrak{x}}{ds}=\mathfrak{w}(\mathfrak{x})$ erscheint; ist weiter $\mathfrak{K}$ die zu der Schar gehörige Kurve, auf der Q liegt, und v die Bogenlänge längs $\mathfrak{K}$, so konvergiert das von Z aus angesetzte Iterationsverfahren dann, wenn für jeden Punkt $X(\mathfrak{x})$ auf $\mathfrak{K}$ in der ganzen in Frage kommenden Umgebung von Q

$$\frac{\overline{ZX}\cdot\left|\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial v}\right|}{\left|\sin\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial v},\mathfrak{w}\right)\right|}\leqq q<1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

ist. Das bedeutet, daß die Konvergenz um so besser ist,

a) je enger die Kurven $\mathfrak{K}$ liegen ($\overline{ZX}$ klein);

b) je weniger sich die Feldrichtung längs $\mathfrak{K}$ ändert $\left(\left|\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial v}\right|\text{ klein}\right)$;

c) je schärfer die Feldrichtung die Kurve $\mathfrak{K}$ schneidet (Winkel zwischen dem Tangentenvektor $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial v}$ von $\mathfrak{K}$ und dem Feldrichtungsvektor $\mathfrak{w}$ nahe an $\frac{1}{2}\pi$).

Ist man mangels Bestimmbarkeit der genauen Lage von Z gezwungen, das Iterationsverfahren näherungsweise von Punkten $\overline{Z}$ aus durchzuführen, so lassen sich auf diesen Fall die oben für die Unterteilung des Richtungsfeldes durch y-Parallelen angestellten Genauigkeitsbetrachtungen und ihre Ergebnisse weitgehend übertragen.

Sind die Kurven $\mathfrak{K}$ die Isoklinen des Richtungsfeldes, so reduziert sich das Iterationsverfahren auf das TV. Sind sie außerdem zur y-Achse parallel, so handelt es sich um die Quadratur $y=\int f(x)\,dx$, bei deren graphischer Durchführung man in dem bekannten Verfahren eine Möglichkeit zur Bestimmung des Zwischenpunktes besitzt.

Breslau. Helmut Heinrich. 107

[5]) Vgl. z. B. H. Heinrich: Allgemeines über Leitkurven in Richtungsfeldern. Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 55.

BUCHBESPRECHUNGEN

C. B. **BIEZENO,** Prof. a. d. Techn. Hochschule Delft, R. **GRAMMEL,** Prof. a. d. Techn. Hochschule Stuttgart, Technische Dynamik. XII + 1056 S. m. 667 Abb. u. 5 Anhängen. Berlin 1939, Verlag Julius Springer. Preis geb. 78 M.

Die Verfasser, die einen großen Teil ihrer bisherigen wissenschaftlichen Arbeit den Fragen der Elastizitätstheorie und der Dynamik, insbesondere ihren Anwendungen auf den Maschinenbau, gewidmet haben, behandeln in dem vorliegenden umfangreichen Werk zahlreiche Probleme, die für den wissenschaftlich arbeitenden Ingenieur von Bedeutung sind. Der Begriff Dynamik wird hier weiter gefaßt als üblich — die Verfasser verstehen darunter ganz allgemein die Lehre von den Kräften —, so daß man in dem Buch vieles findet, was man dem Titel nach nicht erwartet. Nicht nur kinetische, sondern auch zahlreiche statische Probleme, wie sie die technische Praxis der Mechanik stellt, werden darin behandelt. Natürlich mußte selbst für ein so umfangreiches Werk eine Auswahl getroffen werden. Daher haben sich die Verfasser in der Hauptsache auf Fragen beschränkt, die mit dem Maschinenbau, insbesondere mit dem Kraftmaschinenbau zusammenhängen. Vor allem sind ausführlich die Probleme behandelt, zu deren

Lösung einer der beiden Verfasser oder gar beide wesentliche Beiträge geliefert haben. Knapper betrachtet sind Gegenstände, von denen bereits ausführliche Darstellungen vorliegen, wie die Schalentheorie, die Regelung usw. Es gibt aber nicht viel Probleme, die für den Ingenieur in den betreffenden Gebieten von Interesse sind, die man hier nicht findet.

Vorausgesetzt wird an Mathematik und Mechanik im allgemeinen das, was etwa in den Kursusvorlesungen der Technischen Hochschulen gebracht wird, nur hier und da einiges darüber hinaus, wie gewisse Kenntnisse aus der Theorie der Integralgleichungen, der Funktionstheorie usw. Die Darstellung bevorzugt anschauliche Ableitungen und kommt auch sonst der Denkweise des Ingenieurs entgegen, z. B. dadurch, daß — vielleicht abgesehen von der Inversion — keine konformen Abbildungen benutzt werden, sondern anstatt dessen mit angepaßten Koordinaten gearbeitet wird, ferner, daß nicht auf rein mathematisch interessierende Fragen, wie Konvergenzuntersuchungen, Existenzbeweise usw., eingegangen wird. Ausführlich wird natürlich die für alle Ausweichprobleme wichtige Eindeutigkeitsfrage der Lösungen behandelt. Im Vordergrund der Darstellung stehen stets die Methoden der Lösung, aber die Lösungen selbst sind auch immer so weit geführt, daß zahlenmäßige Resultate aus den gefundenen Formeln mit erträglichem Rechenaufwand abgeleitet werden können. Oft sind rechnerisch bequeme Näherungsformeln, oft auch Rechenschemata für die Durchführung der Zahlenrechnungen gegeben. Da für manche Leser nur einzelne Abschnitte von Interesse sein werden, haben die Verfasser die Darstellung so gestaltet, daß ein Leser, der schon etwas vertraut mit dem Gegenstand ist, sich in die einzelnen Kapitel einarbeiten kann, ohne von den vorhergehenden genauer Kenntnis genommen zu haben. Vielfach wird das Buch auch als Nachschlagewerk benutzt werden. Das ist auf Grund der Darstellungsart und des ausführlichen Inhaltsverzeichnisses möglich, doch würde die Brauchbarkeit für diesen Zweck durch ein leider fehlendes, eingehendes Sachverzeichnis erhöht werden.

Den reichen Inhalt im einzelnen aufzuführen, erlaubt leider der hier zur Verfügung stehende Platz nicht; nur ein kurzer Überblick sei gegeben. Der Stoff ist in vier Abschnitte gegliedert. Im ersten werden die Grundgesetze und die allgemeine Theorie der Elastomechanik behandelt. Hier findet man unter anderem den klassischen Gleichungen des elastischen Gleichgewichtes einen Satz von Gleichungen an die Seite gestellt, die den neutralen Gleichgewichtszustand, also die Grenzlage, bei der der Gleichgewichtszustand bei weiterem Wachsen der Belastung aufhört eindeutig zu sein, allgemein erfassen. Die hier gewonnenen Gleichungen finden zwar bei den späteren Untersuchungen technischer Ausweichprobleme keine Verwendung, doch werden sie als Grundlage für eine verfeinerte Behandlung gute Dienste leisten können. Ferner werden hier ausführlich die verschiedenen Lösungsmethoden, insbesondere auch die Näherungsverfahren für Rand- und Eigenwertprobleme, die experimentellen Methoden zur Spannungsermittlung, wie die verschiedenen Analogiemethoden dargestellt. Im zweiten Abschnitt werden einzelne Maschinenteile wie Stab und Welle, Feder und Ring, Platte und Schale, ferner in einem besonderen Kapitel die Ausweichprobleme, also die Knickprobleme, das Durchschlagen gekrümmter Stäbe und Platten und das Umkippen von Ringen untersucht. Der dritte Abschnitt wendet sich Fragen zu, die mit dem Dampfturbinenbau zusammenhängen: rotierende Scheiben, Dehnung, Biegung und Schwingungen der Schaufeln, kritische Drehzahlen der einfach und mehrfach besetzten Wellen usw. Der letzte Abschnitt endlich beschäftigt sich mit Problemen, die bei Bau und Untersuchung von Brennkraftmaschinen auftreten, so mit dem Massenausgleich bei den verschiedenen Motoren, dem Leistungsausgleich bei Ein- und Mehrzylindermaschinen, den Drehschwingungen einfacher und verschieden zusammengeschalteter Maschinen, ferner mit den erzwungenen Schwingungen, der Resonanz und Scheinresonanz, dem Einfluß der Nebentorsion und dem veränderlicher Drehmassen.

Das wertvolle Buch, das den umfangreichen Stoff in sehr geschickter Anordnung und Darstellung behandelt, wird auf viele Jahre hinaus nicht nur allen, die auf diesen Gebieten arbeiten, ein zuverlässiger Ratgeber und ein unentbehrliches Nachschlagewerk sein, sondern auch vielen als ausgezeichnete Einführung in die verschiedenen Gebiete der technischen Dynamik dienen.

Dresden. Willers. 133

Dr. L. **FÖPPL**, o. Prof. a. d. Techn. Hochschule München, Aufgaben aus technischer Mechanik, Unterstufe, Statik, Festigkeitslehre, Dynamik. VII + 202 S. m. 317 Abb. München u. Berlin 1939, Verlag R. Oldenbourg. Preis kart. 10 M.

Das Buch enthält zahlreiche, instruktive Aufgaben zur Statik, Festigkeitslehre und Dynamik, die aus der Ingenieurpraxis geschöpft und für den Unterricht an der Technischen Hochschule aufbereitet wurden, sowie ihre Lösungen. Sicherlich wird auch die vorliegende zweite Auflage, die sich von der ersten, 1929 erschienenen nur wenig unterscheidet, gern von Lernenden und Lehrenden zur Hand genommen werden. Man vergleiche die Besprechung der ersten Auflage in Band X der ZAMM (1930), S. 419!

Freiberg (Sa.). Grüß. 134

Dr.-Ing. RUDOLF **JAESCHKE**, Flugzeugberechnung. Bd. I, Grundlagen der Strömungslehre und Flugmechanik. 2. Aufl. 174 S. m. 88 Abb. u. 21 Zahlentaf. Bd. II, Bearbeitung von Entwürfen und Unterlagen für den Festigkeitsnachweis. 202 S. m. 64 Abb. u. 38 Zahlentaf. München u. Berlin 1939, Verlag R. Oldenbourg. Preis geb. in einem Bd. 13 M.

Wie die bekannte Misessche Fluglehre wendet sich das vorliegende Buch auch „an alle diejenigen, die sich aus beruflichen oder persönlichen Interessen mit Fragen des Flugzeugbaus beschäftigen wollen“. Trotzdem ist das Buch in erster Linie geschrieben für Studierende des Flugzeugbaus: Es ist hervorgegangen aus Kursen des Verfassers an einer Ingenieurschule. Gegliedert ist es in zwei Bände, die zusammen 6 Hauptteile umfassen: Strömungslehre, Flugleistungsberechnung, Flugzeugstabilität, Bauarten, Entwerfen von Flugzeugen, Belastungsannahmen. Wie das nicht anders sein kann, deckt sich der Stoff zum großen Teil mit dem in der „Fluglehre“ behandelten — nur liegt, dem Titel des Buches entsprechend, das Hauptgewicht hier sehr viel mehr auf den Berechnungsbeispielen. So sind in der „Fluglehre“ alle Flugzeugteile in etwa gleicher Ausführlichkeit und immer unter Hervorhebung des physikalisch Wichtigen behandelt, während im vorliegenden Werk z. B. auf die Flugmotoren nur soweit eingegangen wird, als dies für die Beschaffung von Entwurfsunterlagen wünschenswert erscheint. Nur die Strömungslehre ist relativ breit abgehandelt, allerdings ist gerade in diesem Abschnitt die Ausdrucksweise gelegentlich unscharf: So wenn nach S. 21 die Zentrifugalkräfte der abgelenkten Luftteilchen den aus der Bernoullischen Gleichung folgenden Auftrieb „unterstützen“ (die B.sche Gleichung gibt den Auftrieb ja in aller Vollständigkeit wieder) oder wenn es auf S. 31 heißt „Die Zirkulation reißt

vollständig ab", oder wenn in Abb. 20 die Prandtlsche Kontrollinie nach Art der Stromlinien einen Pfeil trägt. Störender noch als diese gelegentlichen Flüchtigkeiten scheint dem Referenten die Aufnahme des (in sich natürlich berechtigten) letzten Abschnittes: „Berechnung der Luftkräfte" in das Buch; denn dessen mathematische Anforderungen gehen weit hinaus über die im übrigen Buch gestellten (s. z. B. die Einführung des Begriffs der Beschleunigung S. 10), so daß die Leser, für die das übrige Buch doch bestimmt ist, den Entwicklungen dieses Abschnittes wohl kaum werden folgen können. — Trotz dieser Einwände im Ganzen ein Buch, das durch seine übersichtliche Gliederung und das darin gesammelte Zahlenmaterial dem Lernenden auf dem Gebiete des Flugzeugentwurfs gute Dienste zu leisten vermag.

Berlin-Adlershof. Marguerre. 146

Dr.-Ing. F. **RÖTSCHER,** Prof. a. d. Techn. Hochschule Aachen, und Dr.-Ing. R. **JASCHKE,** Assist. a. d. Techn. Hochschule Aachen, Dehnungsmessungen und ihre Auswertung. VI + 121 S. m. 191 Abb. und 1 Tafel. Berlin 1939, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 16,80 M.

Die durch Rechnung gewonnenen Ergebnisse der Ermittlung der Spannungsverteilung sind oft — aus verschiedenen Gründen — nicht ausreichend, um die einwandfreie Bemessung technischer Konstruktionen hinsichtlich der Bedingungen des gesicherten Materialverhaltens zu gewährleisten. Die Rechnung muß dann durch Messungen ergänzt werden. Da aber die Spannungen nicht unmittelbar, sondern nur auf dem Wege über die Dehnungen ermittelt werden können, wird hier einerseits eine übersichtliche Beschreibung einer Anzahl von ausgeführten und bewährten Dehnungsmessern gegeben, andrerseits aber — mit großer Ausführlichkeit — die Frage behandelt, wie aus Dehnungsmessungen einwandfreie Rückschlüsse auf die Spannungsverteilung gewonnen werden können. Dabei werden in umfassender Weise die Mohrschen Kreise herangezogen, die sich auch auf anderen Gebieten der technischen Mechanik als überlegenes Darstellungsmittel für Tensoren zweiter Stufe in zwei und drei Dimensionen bewährt haben. — Die Behandlung von — anderswo selten gebrachten — Sonderfragen, wie die Zusammensetzung von Verformungs- und Spannungszuständen, die der Fehler und Störungen bei Dehnungsmessungen u. v. a., sowie auch die vielen lehrreichen Abbildungen erhöhen noch den Wert der sehr anschaulich geschriebenen und durch seine besondere Fragestellung und Darstellungsweise außerordentlich aufschlußreichen Büchleins.

Karlsruhe. Th. Pöschl. 152

Dr. GUSTAV **MESMER,** Spannungsoptik. XI + 222 S. m. 197 zum Teil farbigen Abb. Berlin 1939, Verlag Julius Springer. Preis geb. 30 M.

Mit Rücksicht auf die zunehmende Bedeutung der Spannungsoptik für die Praxis ist das vorliegende Buch sehr zu begrüßen. Es stellt gegenüber dem in deutscher Sprache bisher allein vorhandenen Lehrbuch über Spannungsoptik v. L. Föppl und H. Neuber eine wertvolle Ergänzung und Bereicherung dar. Besonders hervorzuheben sind hierbei die zahlreichen gut ausgeführten praktischen Beispiele; ferner die Zusammenstellung der verschiedenen Geräte und der meisten Lösungsverfahren von praktischer Bedeutung. Auch der umfangreiche Literaturnachweis am Schluß des Buches stellt eine wertvolle Zusammenstellung für den Forscher dar. Das erste Kapitel ist der üblichen Darstellung des ebenen Spannungszustandes, das zweite den optischen Grundlagen der Spannungsoptik gewidmet. Es folgen im 3. und 4. Kapitel die Lösungsverfahren der Spannungsoptik, deren Bedeutung in praktischer Hinsicht gut abgeschätzt worden sind. Das 5. Kapitel, das sich mit den erforderlichen Geräten beschäftigt, sowie das 6. Kapitel, das die Versuchstechnik im einzelnen behandelt, enthält namentlich für solche, die zu Forschungszwecken oder für die Praxis ein spannungsoptisches Laboratorium einrichten und mit solchen Versuchen beginnen wollen, wertvolle Hinweise. Das 7. Kapitel geht auf Sonderfragen der Spannungsoptik ein, die erst in den letzten Jahren behandelt worden sind, nämlich auf dynamische Spannungsaufgaben und ferner auf das sehr wichtige und zukunftsreiche Gebiet der räumlichen Spannungsoptik. Das Buch schließt mit dem 8. Kapitel, das eine reiche Übersicht über verschiedene auf spannungsoptischem Wege gelöste praktische Aufgaben gibt. —

Das Buch kann jedem, der sich mit Spannungsoptik beschäftigen will, wärmstens empfohlen werden.

München. L. Föppl. 144

Dr. A. **THUM,** Prof. a. d. Techn. Hochschule Darmstadt, und Dr.-Ing. K. **FEDERN,** Spannungszustand und Bruchausbildung, anschauliche Darstellung der spannungsmechanischen Grundlagen der Gestaltsfestigkeit und der Gesetzmäßigkeiten der Bruchausbildung. V + 78 S. m. 83 Abb. Berlin 1939, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 9,60 M.

Auf Grund der Ergebnisse zahlreicher Dauerversuche, die von den Verfassern an der Staatlichen Materialprüfungsanstalt Darmstadt durchgeführt wurden, werden im vorliegenden Bande für die Gesetzmäßigkeiten der Bruchausbildung und der Bruchgefahr spannungsmechanische Deutungen gegeben. Dabei knüpfen die Verfasser an neuere Erkenntnisse der theoretischen Festigkeitsforschung (vgl. H. Neuber, Kerbspannungslehre, Berlin 1937, Julius Springer) an und gelangen in einer Reihe von Fällen zu wichtigen Folgerungen. Das unterschiedliche Verhalten der Werkstoffe gegenüber „Gewaltbruch", „Zeitbruch" und „Dauerbruch" wird an Hand von vielen Bruch- und Gefügebildern unter Berücksichtigung von Beanspruchungsart und Spannungszustand eingehend erläutert. Der Einfluß des Spannungszustandes auf den Bruchvorgang, der an Hand der vielen Versuchsergebnisse besonders eindringlich hervortritt, ist ein Beweis der großen Bedeutung rechnerisch erfaßbarer Spannungszustände für die Dauerbruchforschung.

Braunschweig. H. Neuber. 145

Oberbaurat Dr.-Ing. ehr. FRITZ von **EMPERGER,** Stahlbeton mit vorgespannten Zulagen aus höherwertigem Stahl. VI + 38 S. m. 22 Abb. Berlin 1939, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis brosch. 4,40 M.

Während die elementare Festigkeitslehre für Verbund-Konstruktionen aus Beton und Stahl von vornherein mit der gerissenen Zugzone des Querschnitts rechnet, beschäftigt sich der Verfasser in seiner Arbeit mit Maßnahmen zur Vermeidung von Rissen und zur Erhöhung der Wirtschaftlichkeit dieser Baukonstruktionen durch die Verwendung von Stahl von höherer Festigkeit und durch die Vorspannung der Rundeisenbewehrung. Er erörtert in Verbindung damit Maßnahmen, dieses Ziel namentlich durch die gleichzeitige Verwendung verschiedener Stahlsorten zu erreichen, und begründet seine Vorschläge durch die Ergebnisse von Versuchen, die insbesondere der Haftfestigkeit von dünnen, vorgespannten Drähten im Beton gelten. Diese Untersuchungen bilden einen wertvollen empirischen Beitrag zur Förderung der gegenwärtigen Bestrebungen im Eisenbetonbau.

Dresden. K. Beyer. 141

Dr.-Ing. FRITZ **LEONHARDT,** Anleitung für die vereinfachte Trägerrostberechnung mit Hilfstafeln, Formeln und Beispielen. III + 104 S. m. 86 Abb. Berlin 1940, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis brosch. 7,50 M.

Der Verfasser behandelt die Entwicklung von Modellen von Trägerrosten und die Ausmessung des Verschiebungszustandes unter ausgezeichneten Belastungseinheiten, um daraus die Einflußlinien der Verbindungskräfte an den Knotenpunkten des Rostes nach dem Maxwellschen Gesetz abzuleiten. Das Verfahren, das bereits anderweit ausgeprobt ist, eignet sich hier insbesondere zur statischen Untersuchung von Trägerrosten mit unregelmäßiger oder schiefer Zuordnung der Träger, da sich die analytischen Untersuchungen dann nicht durch Symmetriebetrachtungen und Belastungsumordnung vereinfachen lassen. In dem 2. Teil des Buches werden die Verbindungskräfte an den Knoten regelmäßiger Trägerlagen mit einem Querträger angegeben und für mehrere Querträger geschätzt. Diese Ergebnisse sind zwar bereits bekannt, aber hier übersichtlich für den Handgebrauch am Konstruktionstisch bearbeitet, zusammengestellt und durch Beispiele erläutert worden. Ein Schlußabschnitt enthält wertvolle Richtlinien für die Ausbildung von Trägerrosten in Stahl- und Eisenbeton.

Dresden. K. Beyer. 142

Dr.-Ing. HEINRICH **PRESS,** Der Boden als Baugrund. (Mitteilungen aus dem Gebiete des Wasserbaues und der Baugrundforschung, Heft 9.) V + 49 S. m. 64 Abb. Berlin 1939, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis br. 5,80 M.

Das Mitteilungsheft aus dem Gebiete der Baugrundforschung bringt nicht, wie man zunächst erwartet, neue Forschungsergebnisse, sondern faßt die in den letzten 10 Jahren von Preß in verschiedenen Zeitschriften veröffentlichten Versuchsergebnisse und sonstigen Abhandlungen zusammen. Da diese nur einige kleine Teilgebiete des großen Themas „Der Boden als Baugrund" betreffen, hat der Verfasser die Lücken durch Auszüge aus Normen, Richtlinien und Baugrundlehrbüchern ergänzt. Da er nun aber nur sich selbst zitiert, könnte ein unbefangener Leser den Eindruck gewinnen, als sei die neuere Bodenmechanik von Preß aufgebaut worden. Demgegenüber muß festgehalten werden, daß selbst die eigenen Preßschen Versuche meist nur eine Wiederholung älterer Versuche darstellen, also meist ohne Originalität oder Priorität sind.

Auf den ersten 10 Seiten behandelt das Heft die Bodenbenennung (Din 4022), allgemeine, geophysikalische und bautechnische Bodenaufschlüsse und die Bodenentnahme (Din 4021). Die restlichen 40 Seiten sind der Bodentragfähigkeit gewidmet. Hiervon stellen wiederum 10 Seiten zunächst einen kurzen lehrbuchmäßigen Auszug aus der Bodenphysik dar, dann folgen weitere 10 Seiten Versuchsergebnisse von Probebelastungen des Verfassers mit kleinen Lastflächen, denen sich Ergebnisse von Pfahlprobebelastungen anschließen (S. 31—37). Es folgt ein kurzer lehrbuchmäßiger Auszug aus der Grundwasserlehre. Die letzten 10 Seiten bringen die Druckverteilung im Baugrunde und die Setzungsermittlung. Bei der Druckverteilung werden in rein autodidaktischer Form auch nur eigene Versuche angeführt, der Rest ist wiederum ein Auszug aus der Setzungslehre ohne Anführung der benutzten Quellen.

Obwohl Preß von dem verstorbenen Prof. Dr. Kögler schon einmal darauf aufmerksam gemacht worden ist, daß es doch bei wissenschaftlichen Veröffentlichungen üblich sei, auch auf fremde Arbeiten hinzuweisen, besonders wenn sie genau das gleiche behandeln, aber zeitlich früher ausgeführt worden sind, hat er wiederum an seiner ungewöhnlichen einseitigen Darstellungsweise festgehalten.

Preß fordert schließlich die Fachkreise eifrig zu Setzungsmessungen auf, veröffentlicht in seinem Büchlein aber nicht ein einziges eigenes Ergebnis, das doch überzeugender werben müßte als bloße Worte.

Ohne den Wert der Preßschen Versuche, die er mit Hingabe meist zur Bestätigung früherer ähnlicher Versuche durchgeführt hat, irgendwie herabsetzen zu wollen, mußte doch die Art und Form der Darstellung im Interesse des unbefangenen Lesers festgestellt werden. Ob der in der Baupraxis stehende Ingenieur den Überblick über das Thema gewinnt, den Preß als Ziel hinstellt, muß bei dem einseitigen Darstellungsverfahren füglich bezweifelt werden.

Naumburg (Saale). Dr. Scheidig. 139

Dr.-Ing. habil. KURT **RAUH,** a. o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Aachen, Praktische Getriebelehre. II. Bd. VIII + 298 S. m. 709 Abb. Berlin 1939, Verlag Julius Springer. Preis geb. 29,40 M.

Wenn in dem Gelenkviereck einzelne Gelenke in Geradführungen umgebildet werden, so können daraus zahlreiche andere Getriebe abgeleitet werden. Geschieht dies mit drei Gelenken, so entsteht die dreigliedrige Keilkette, von der durch Spezialisierung drei weitere Getriebegruppen abgeleitet werden können: die Schubgetriebe, Sperrungen oder Kupplungen und die Führungsgetriebe, die in diesem Bande eingehend behandelt werden. Die bisher benutzte Reuleauxsche Einteilung der Getriebe erweist sich dabei als unzulänglich und ergibt nur einige der möglichen Stufen eines systematischen Getriebeaufbaues. Zahlreiche Einzelfragen der praktischen Getriebelehre, die sich auf den Entwurf und die einwandfreie Gestaltung und Herstellung geräuscharmer Getriebe, auf die Kupplungen und stufenlosen Schaltungen u. dgl. beziehen, werden besonders behandelt. Das Buch enthält zahlreiche, übersichtlich angeordnete Abbildungen und praktische Hinweise und dürfte seiner elementaren Beschaffenheit halber, die mathematische Entwicklungen fast völlig vermeidet, dem praktischen Getriebekonstrukteur willkommen sein.

Karlsruhe. Th. Pöschl. 153

Dipl.-Ing. W. **BÜTTNER,** Die Entropie, physikalische Grundlagen und technische Anwendungen. 140 S. m. 86 Abb. Berlin 1939, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 9 M.

Die Entropie ist eine Zustandsgröße, mit der der Ingenieur sehr viel zu tun hat: Sie ist ja die Abszisse der meisten Mollierdiagramme. Trotz dieses häufigen Gebrauches stehen sehr viele Ingenieure der Entropie mit einer gewissen Scheu gegenüber — vielleicht weil sie bei den üblichen Ableitungen dieses Begriffes die Gegenständlichkeit vermissen.

Hier will die Arbeit von Büttner weiterhelfen. In dem etwa 30 Seiten umfassenden ersten Teil der Schrift wird die Zustandsgröße Entropie abgeleitet. Dabei wird auch auf den Zusammenhang zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit eingegangen.

Der zweite umfangreichere Teil des Büchleins bringt in klarer Weise die Grundlagen und die Anwendung der Entropieschaubilder auf Wärmekraft- und -arbeitsmaschinen.

Im Anhang wird noch das Entropiediagramm der festen Körper behandelt und gezeigt, wie es bei Festigkeitsrechnungen zur Bestimmung des Sicherheitsgrades benutzt werden kann.

Dresden. Mehlig. 135

WILHELM **WEYDANZ** VDI, Die Vorgänge in Strahlapparaten. Mitteilungen aus dem Maschinenlaboratorium der Technischen Hochschule Karlsruhe. (Beiheft zur Zeitschrift für die gesamte Kälte-Industrie, herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. R. Plank, Reihe 2, Heft 8.) 139 S. m. 53 Abb. Berlin 1939, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 3 M.

Es ist ein Zeichen für die Wichtigkeit, die den Strahlapparaten beigemessen wird, daß ganz kurz nach der Arbeit von Flügel über die Berechnung von Strahlapparaten eine umfangreichere Arbeit erscheint, die das Problem von einer völlig anderen Seite anpackt. Es wird in der Arbeit von Weydanz der Versuch unternommen, Berechnungsunterlagen für den Entwurf von Strahlern auf Grund von Messungen zu gewinnen, die zum Teil vom Verfasser selbst durchgeführt wurden. Bei der Berechnung wird der Strömungsvorgang im Strahler aufgespalten in drei Teile, nämlich die Strömung in der Düse, im Mischraum und im Diffusor. Für diese drei Strömungen werden die Verluste und die sich daraus ergebenden Einzelwirkungsgrade berechnet. Am wertvollsten ist dabei die Untersuchung über den Wirkungsgrad der Düse auf Grund des bekannten Ansatzes über die Wandreibung. Die Ergebnisse dieser Rechnung haben auch dem Dampfturbinenbauer mancherlei zu sagen.

Das Ergebnis der Arbeit ist eine Berechnungsanweisung, die es gestattet, beim Neuentwurf von Strahlern die Querschnitte zu bestimmen und die richtigen Druckverhältnisse zu wählen.

Der Verfasser bezeichnet selbst die zahlenmäßigen Ergebnisse seiner Arbeit als eine erste Annäherung und die ganze Untersuchung als einen ersten grundsätzlichen Schritt zu allgemeinen Berechnungsmethoden für Strahlapparate. Selbst unter Berücksichtigung dieser Einschränkung müssen aber einige grundsätzliche Bedenken erhoben werden, die zur Vorsicht mahnen.

1. Bei den Versuchen wurden nur die Drucke und Temperaturen vor und hinter dem Strahler sowie die durchfließenden Stoffmengen gemessen. Messungen zur Klarstellung der Strömungsvorgänge innerhalb des Strahlers wurden überhaupt nicht gemacht. Infolgedessen beruhen sämtliche Aussagen des Verfassers über die Strömungen im Strahler nur auf Annahmen. Bei der heutigen Versuchstechnik wäre es möglich gewesen, wertvolle Aufschlüsse durch verhältnismäßig einfache Messungen zu gewinnen.

2. Die Versuche wurden nur an fertigen Strahlern durchgeführt, an deren Abmessungen nichts geändert werden konnte. Vor allem wurde nur die gerade vorhandene Form des Mischraums untersucht, trotzdem anzunehmen ist, daß diese auf Wirkungsgrad und Kennlinie des Strahlers einen sehr großen Einfluß hat.

3. Die strömungstechnischen Erklärungen des Verfassers sind an mehr als einer Stelle anfechtbar und lassen sich nicht mit dem heutigen Stand der Strömungslehre in Einklang bringen.

Aus diesem Grunde muß es selbst unter den obengenannten Einschränkungen als fraglich erscheinen, ob die Arbeit den Ingenieur wirklich in der Vorausberechnung von Strahlern wesentlich weiterführt.

Augsburg. E. Sörensen. 136

ARNOLD **SOMMERFELD**, Prof. a. d. Universität München, Atombau und Spektrallinien. II. Bd. 2. umgearb. u. erweit. Aufl. d. „Wellenmechanischen Ergänzungsbandes". XI + 820 S. m. 62 Abb. Braunschweig 1939, Verlag Vieweg & Sohn. Preis geb. 35 M.

Diese langerwartete zweite Auflage wird von Physikern und Mathematikern begrüßt werden vor allem als eine einzigartige Darstellung der mathematischen Hilfsmittel der Wellenmechanik. Diese Hilfsmittel sind vollständig entwickelt und an der konkreten Aufgabe anknüpfend weitgehend allgemein durchgeführt. Das Grundsätzliche in der physikalischen Auffassung und die Begründung der Ansätze durch allgemeine Erfahrungstatsachen ist dabei etwas in den Hintergrund gestellt. Dafür sind jedoch eine Reihe von Fragen, die für die Beobachtung wichtig sind (Photo-Effekt, kontinuierliches Röntgenspektrum, Compton-Effekt) vollständig durchgerechnet. Außer den genannten Fragen sind gegenüber der ersten Auflage wesentlich ausführlicher dargestellt einige Eigenschaften des Wasserstoffspektrums (dabei auch die hypergeometrischen Funktionen) und vor allem die Diracsche Theorie des Elektrons unter Benutzung der Gruppe der hyperkomplexen Einheiten (statt der besonderen Diracschen Matrizen).

Leipzig. F. Hund. 122

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

C. **CRANZ** und O. von **EBERHARD**, Die neuzeitliche Entwicklung der Schußwaffen. 2. erweiterte Aufl. 72 S. m. 23 Bildern. Berlin 1939, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 2 M.

Dr. sc. techn. ALFRED **MANGER**, Der durchlaufende Balken auf elastisch drehbaren und elastisch senkbaren Stützen einschließlich des Balkens auf stetiger elastischer Unterlage. (Mitteilungen aus dem Institut für Baustatik a. d. Eidg. Technischen Hochschule in Zürich, herausgegeben von den Professoren Dr. M. Ritter und Dr. F. Stüssi, Mitteilung 10.) 170 S. m. 77 Fig., 25 Tab., 8 graph. Beilagen. Zürich und Leipzig 1939, Verlag A.-G. Gebr. Leemann & Co. Preis brosch. 7,50 M.

Il V° Convegno Interprovinciale Di Aerotecnica, Neapel, 19. bis 22. Mai 1938. 466 S. Rom 1939, Istituto Poligrafico Dello Stato.

Dr. HERMANN **DIESSELHORST**, Prof. em. d. Physik a. d. Techn. Hochsch. in Braunschweig, Magnetische Felder und Kräfte mit einer Übersicht über die Vektorenrechnung, eine mit Zusätzen versehene Sonderausgabe des Beitrages „Elektrodynamik" aus Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus, Bd IV (1920). VI + 216 S. m. 56 Abb. Leipzig 1939, Verlag Johann Ambrosius Barth. Preis kart. 8 M.

Prof. Dr. F. **RAUSENBERGER**, Theorie der Rohrrücklaufgeschütze. 2. Aufl. bearb. v. Prof. Dr. O. von Eberhard. IX + 175 S. m. 64 Abb. Berlin 1939, Verlag Julius Springer. Preis geb. 16,20 M.

Professor Dipl.-Ing. RUDOLF **VOGDT**, Formelsammlung zur Technischen Mechanik (Statik und Dynamik des Maschinenbaus). III. verb. Aufl. VIII + 65 S. m. 132 Abb. Leipzig 1939, Dr. Max Jänecke Verlagsbuchhandlung. Preis brosch. 0,90 M.

Dr. K. **SCHWIDEFSKY**, wissenschaftl. Mitarbeiter d. Opt. Werke Zeiß, Jena, Einführung in die Luft- und Erdbildmessung. 2. erw. u. verb. Aufl. m. 73 Abb., drei schwarzen und zwei farbigen Tafeln im Text, einer schwarzen Tafel, einer farbigen Brille und zwei Stereobildern im Anhang. IV + 137 S. Leipzig und Berlin 1939, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 8 M.

Dr. phil. FRIEDRICH **DRENCKHAHN**, Prof. a. d. Hochschule f. Lehrerbildung, Rostock, unter Mitarbeit von Dr.-Ing. habil. ULRICH **GRAF**, Prof. a. d. Techn. Hochschule Danzig, Geländemathematik. VII + 212 S. Langensalza 1939, Verlag Julius Beltz. Preis geb. 7 M.

Dr. phil. HEINRICH **HECHT**, Schaltschemata und Differentialgleichungen elektrischer und mechanischer Schwingungsgebilde. VI + 125 S. m. 51 Abb. Leipzig 1939, Verlag Johann Ambrosius Barth. Preis brosch. 9,60 M.

Professor Dr. phil. Dr.-Ing. e. h. KARL WILLY **WAGNER**, Operatorenrechnung nebst Anwendungen in Physik und Technik, nach Vorträgen, veranstaltet durch den Bezirk Berlin des Verbandes Deutscher Elektrotechniker — vormals Elektrotechnischer Verein e. V. — in Gemeinschaft mit dem Außeninstitut der Technischen Hochschule Berlin. XIV + 448 S. m. 126 Abb. Leipzig 1940, Verlag Johann Ambrosius Barth. Preis brosch. 27,60 M.

Dr.-Ing. FRITZ **WEINIG**, n. b. a. o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Aerodynamik der Luftschraube. XVI + 484 S. m. 374 Textabb. Berlin 1940, Verlag Julius Springer. Preis geb. 48 M.

Flugabwehr. Sonderheft. IV + 63 S. m. 137 Bildern und 2 Zahlentafeln. Berlin 1940, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 2,75 M.

Dr.-Ing. habil. BERNHARD **FRITZ**, Dozent a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe, Berechnung von Kreisgewölben, Gebrauchsfertige Tabellen zur statischen Berechnung von Gewölben mit kreisbogenförmiger Achse. IV + 34 S. m. 12 Textabb. Berlin 1940, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis 3,20 M.

H. W. **DROSTE**, Die Lösung angewandter Differentialgleichungen mittels Laplacescher Transformation. Mit einem Vorwort von Professor Dr. phil. G. Doetsch. (Neuere Rechenverfahren der Technik, Heft 1, 1939.) 35 S. Berlin 1939, Verlag E. S. Mittler & Sohn. Preis 5 M.

NACHRICHTEN

Neu berechnete Tafeln.

Auf S. 115 bis 129 seines Leitfadens zur Berechnung von Schallvorgängen (Berlin 1939 bei Springer) gibt H. **Stenzel** Zahlentafeln für die Integrale von gewissen Funktionen, die mit den Besselschen Zylinderfunktionen $J_p(x)$ für $\pm p = 2n + 0{,}5$ zusammenhängen ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Es sei

$$\left.\begin{matrix} f_n(x) \\ g_n(x) \end{matrix}\right\} = (-1)^n \sqrt{\frac{1}{2}\pi x}\, J_{\pm(2n+0{,}5)}(x)$$

$$= p_n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\, x \pm q_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, x$$

mit

$$p_n - i\,q_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n+k)!}{(2n-k)!}\,\frac{1}{k!\,(2\,x\,i)^k},$$

und es sei

$$\sigma_{2n}(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt, \quad \zeta_{2n}(x) = \int_a^x g_n(t)\,dt.$$

Die untere Grenze a ist so zu wählen, daß sich der Ausdruck für ζ nur aus Gliedern mit dem Faktor $\sin x$ oder $\cos x$ zusammensetzen läßt. Die Tafeln geben die Werte der Funktionen $\sigma_{2n}(x)$ und $\zeta_{2n}(x)$ für $n = 0, 1, \ldots 9, 10$ und für $x = 1{,}00; 1{,}25; \ldots 9{,}75; 10{,}00$ mit 5 geltenden Stellen.

Wenn mit allen 5 Dezimalen interpoliert werden soll, müssen noch die vierten Differenzen herangezogen werden. (Für lineare Interpolation dürfte der Schritt höchstens $= 0{,}006$ sein, für quadratische Interpolation höchstens $= 0{,}04$.) Beim Schritt 0,25 kann der durch die Beschränkung auf die lineare Interpolation entstehende Fehler bis auf 0,008 anwachsen, also schon die zweite Dezimale um 1 fälschen. Bei quadratischer Interpolation kann der Fehler 0,001 erreichen, so daß man drei brauchbare Dezimalen erhält.

Stuttgart. Fritz Emde. 154

Neu berechnete Tafeln.

In seiner Züricher Dissertation „Über die Festigkeit der Kegelschale" (Zürich 1917 bei Orell Füssli) setzt Fr. Dubois

$$J_2(2\sqrt{i x}) = -l_1(x) - i\,l_2(x),$$

$$\pi H_2^{(1)}(2\sqrt{i x}) = l_4(x) - i\,l_3(x),$$

$$\pi H_2^{(2)}(2\sqrt{-i x}) = l_4(x) + i\,l_3(x)$$

und gibt auf S. 126/7 die Werte von l_m, $d\,l_m/d\,x$, $\int l_m\,d\,x$ mit 4 bis 9 geltenden Stellen für $x = 0{,}6; 1{,}1; 1{,}6; \ldots 38{,}5; 42{,}0; 45{,}5$ (Schritt unregelmäßig). Auf 3 Seiten werden Kurven dieser Funktionen gegeben.

[Bei F. Tölke, Besselsche und Hankelsche Zylinderfunktionen nullter bis dritter Ordnung vom Argument $r\sqrt{i}$ (Stuttgart 1936 bei Wittwer) findet man die Funktionen $J_{21} = -l_1$, $J_{22} = -l_2$, $G_{21} = \frac{1}{2}l_3$, $G_{22} = \frac{1}{2}l_4$ vierstellig für $r = 2\sqrt{x} = 0{,}01; 0{,}02; \ldots 20{,}99; 21{,}00$ (also $x = 0{,}000\,025$ bis $110{,}25$). Aus diesen Zahlenfolgen kann man leicht die Ableitungen bilden und etwas mühsamer auch die Integrale.]

Stuttgart. Fritz Emde. 159

Internationaler Mathematiker-Kongreß.

Der internationale Mathematiker-Kongreß, der im September 1940 in Cambridge (Mass.) stattfinden sollte, ist auf einen günstigeren Zeitpunkt verschoben.

Persönliches.

Dem Direktor des Kaiser-Wilhelm-Institutes für Strömungsforschung in Göttingen, Prof. Dr. L. Prandtl, wurde anläßlich seines 65. Geburtstages die Goethe-Medaille für Kunst und Wissenschaft verliehen.

Die Akademie der Wissenschaften in Wien hat das bisherige korrespondierende Mitglied, den o. Professor der Technischen Hochschule Graz, Dr. Karl Federhofer, zum ordentlichen Mitgliede ihrer mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse gewählt.

Der o. Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule Aachen, Dr. W. Müller, wurde zum o. Prof. an der Universität München ernannt.

Es verstarb der frühere o. Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule Berlin, Geh. Regierungsrat Dr. Karl Haußmann.

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —